ОТ СЕССИИ
ДО СЕССИИ

А. В. Галабурдин

МИНИ-СПРАВОЧНИК ДЛЯ ВУЗОВ

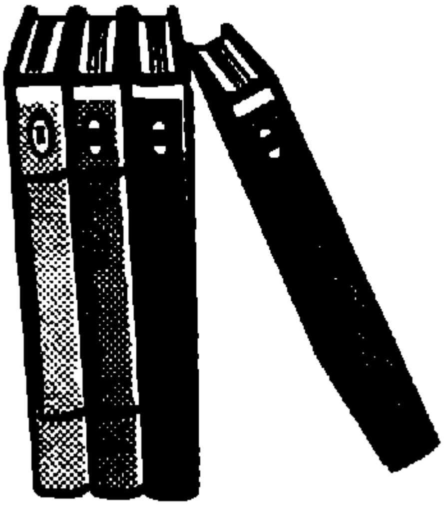
ВЫСШАЯ математика

Феникс

Серия
«От сессии до сессии»

А. В. Галабурдин

МИНИ-СПРАВОЧНИК ДЛЯ ВУЗОВ



ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ростов-на-Дону
Феникс
2014

УДК 51(032)
ББК 22.1я2
КТК 11
Г15

Галабурдин А. В.

Г15 Мини-справочник для вузов: высшая математика / А. В. Галабурдин. — Ростов н/Д: Феникс, 2014. — 190 с. — (От сессии до сессии).

ISBN 978-5-222-21702-3

Данный мини-справочник предназначен для студентов гуманитарных факультетов высших учебных заведений при подготовке и сдаче экзаменов по высшей математике.

ISBN 978-5-222-21702-3

УДК 51(032)
ББК 22.1я2

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и операции над ними

Определение. Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов.

Числа, входящие в эту таблицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A, B, C и т.д. Элементы матрицы обозначаются той же буквой, что и матрица, строчной буквой с двумя индексами (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}). Первый индекс указывает номер строки, в которой располагается данный элемент, а второй — номер столбца. Например, a_{35} означает элемент матрицы A, расположенный в третьей строке и в пятом столбце.

Общий вид матрицы A размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица называется квадратной порядка n, если она состоит из n строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Совокупность элементов квадратной матрицы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, стоящая на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, называется главной диагональю квадратной матрицы.

Совокупность элементов квадратной матрицы, стоящая на диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний угол, называется побочной диагональю квадратной матрицы.

Матрица, все элементы которой равны нулю, кроме элементов главной диагонали, называется диагональной.

Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, называется единичной (обозначается символом E или I).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой.

Операции над матрицами

1. **Сравнение матриц.** Две матрицы одинаковой размерности называются равными, если равны их соответствующие элементы.

То есть из равенства матриц A и B следует, что $a_{ij}=b_{ij}$, где $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

2. **Транспонирование матриц.** Транспонированной A^T матрицей матрицы A называется матри-

ца, строки которой являются столбцами матрицы A, а столбцы — строками.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & 7 \\ 11 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

3. **Сложение матриц.** Суммой матриц A и B одинаковой размерности является матрица С той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Следовательно, из $C = A + B$ следует, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.

Свойства операции сложения:

1) $A + B = B + A$;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $A + 0 = A$, где 0 — нулевая матрица.

4. **Умножение матрицы на число.** Произведением числа α на матрицу A называется матрица C той же размерности, все элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A, умноженным на число α.

Значит, если $C = \alpha \cdot A$, то $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, где $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $C = 5 \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ -30 & 0 \\ 35 & 5 \end{pmatrix}$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1) $\alpha(\lambda A) = (\alpha\lambda)A$;

2) $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$;

3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \lambda B$, где α и λ — числа.

5. **Умножение матриц.** Произведением матрицы A размерности $m \times p$ на матрицу B размерности $p \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$ элемент c_{ij} (расположенный в i-й строке и j-м столбце), которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{ip}b_{pj}.$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

Тогда

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \times 3 + 0 \times (-1) + 3 \times 0 = 3,$

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \times 5 + 0 \times 6 + 3 \times 7 = 26,$

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 5 \times 3 + (-2) \times (-1) + + 1 \times 0 = 17,$

$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 5 \times 5 + (-2) \times 6 +$
$+ 1 \times 7 = 20,$
$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 5 \times 3 + 0 \times (-1) +$
$+ 2 \times 0 = 15,$
$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 5 \times 5 + 0 \times 6 + 2 \times 7 = 39,$
$c_{41} = a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31} = -4 \times 3 + (-1) \times (-1) +$
$+ 7 \times 0 = -11,$
$c_{42} = a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{43}b_{32} = -4 \times 5 + (-1) \times 6 +$
$+ 7 \times 7 = 23.$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 26 \\ 17 & 20 \\ 15 & 39 \\ -11 & 23 \end{pmatrix}$$

Свойства операции умножения матриц:

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$ в общем случае выполняется указанное неравенство, хотя в некоторых частных случаях $A \cdot B = B \cdot A$;
2) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
3) $A \cdot (B + C) = A \cdot C + B \cdot C$;
4) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
5) $A \cdot E = E \cdot A = A$.

1.2. Определители

Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие некоторое число, зависящее от ее элементов, которое называется определителем матрицы $|A|$. Иногда пользуются другими обозначениями определителя матрицы – $\det(A)$ или $\Delta(A)$.

Определителем матрицы второго порядка называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определители матриц более высокого порядка имеют еще более громоздкие выражения, поэтому ими не пользуются. При вычислении определителей порядка более третьего используют свойства определителей.

Свойства определителей

1. Величина определителя не изменяется при транспонировании $|A| = |A^T|$.

2. Величина определителя не изменяется при четном числе перемен местами двух его строк или столбцов. Например, если поменять местами вторую и шестую строки, то вторая строка поменяется местами с третьей, потом с четвертой, с пятой и затем с шестой, имеем 4 перемены мест (четное число) и определитель не изменится.

3. Определитель изменит только свой знак при нечетном числе перемен местами двух его строк или столбцов. Например, если поменять местами

первый и четвертый столбцы, то первый столбец поменяется местами со вторым, затем с третьим и с четвертым, имеем 3 перемены мест и определитель изменит лишь свой знак.

4. Если все элементы некоторой строки или некоторого столбца определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

5. Если соответствующие элементы двух строк или столбцов определителя равны или пропорциональны, то определитель равен нулю.

6. Если все элементы какой-нибудь строки или столбца определителя умножить на одно и то же число, то весь определитель умножается на это число.

7. Если к каждому элементу какой-нибудь строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на некоторое число, то величина определителя при этом не изменится.

8. Суммой двух определителей одинакового порядка $|A|$ и $|B|$, которые отличаются лишь элементами какой-нибудь строки или какого-нибудь столбца, является определитель $|C|$ того же порядка, все элементы которого равны элементам определителей $|A|$ и $|B|$, кроме элементов указанной выше строки или столбца, равных сумме соответствующих элементов этой же строки или столбца определителей $|A|$ и $|B|$.

Если определители $|A|$ и $|B|$ отличаются, например лишь элементами k-й строки

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \cdots & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то суммой этих определителей будет определитель $|C|$, равный

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & a_{k3}+b_{k3} & \cdots & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} определителя $|A|$ называется определитель, который получается из определителя $|A|$ посредством вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Например, минором M_{23} определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

будет определитель, полученный из определителя $|A|$ вычеркиванием второй строки и третьего столбца $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij}, взятый со знаком плюс, если сумма индексов $i + j$ четная, и со знаком минус, если сумма индексов нечетная

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Например, алгебраическое дополнение элемента a_{23} приведенного выше определителя $|A|$ равно

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 15) = -13.$$

Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или любого его столбца на их алгебраические дополнения.

Например, определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ -7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

можно представить в виде разложения по элементам третьей строки

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ -7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -7A_{31} + 5A_{32} + 1A_{33} =$$

$$= -7\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 5(-1)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -7(0 - 15) - 5(30 + 12) + 1(25 - 0) =$$

$$= 105 - 210 + 25 = -80$$

или в виде разложения по элементам второго столбца

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ -7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0A_{12} + 5A_{22} + 5A_{32} =$$

$$= 0(-1)\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -0(-4 + 42) + 5(5 + 21) - 5(30 + 12) =$$

$$= 0 + 130 - 210 = -80.$$

Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.

Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

1.3. Системы линейных алгебраических уравнений

В общем случае система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{mn}$ — коэффициенты уравнений системы; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — неизвестные, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ — правые части уравнений системы.

Если правые части уравнений системы равны нулю, то система называется однородной. В противном случае система называется неоднородной.

Решением системы линейных уравнений называется такая совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, которая, будучи подставленной в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных, обращает их в числовые тождества.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение.

Система линейных уравнений называется несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Система линейных уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение.

Система линейных уравнений называется неопределенной, если она имеет более одного решения.

Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если решения одной системы линейных уравнений являются решениями другой системы.

Матрица A, элементами которой являются коэффициенты уравнений системы, называется матрицей системы линейных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Рассмотрим систему линейных уравнений, у которой число неизвестных n равно числу уравнений m.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Определитель матрицы такой системы $|A|$ называется определителем системы линейных уравнений.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta .$$

Допустим, что определитель рассматриваемой системы не равен нулю. Тогда система имеет единственное решение, которое определяется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ получаются из определителя системы линейных уравнений путем замены соответствующего столбца столбцом правых частей

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_2 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Пример. Решим методом Крамера систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 28 \end{cases}.$$

Вычислим определители, необходимые для нахождения решения системы. Определитель системы Δ вычислим, разложив его по элементам первой строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(7 + 3) + (14 + 5) + 2(6 - 5) = 30 + 19 + 2 = 51.$$

Определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 вычислим, разлагая их, соответственно по элементам первого, второго и третьего столбцов. Эти столбцы содержат нулевой элемент, и поэтому разложение определителей по указанным столбцам будет более простым.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 28 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 13\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 28\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 13(7 + 3) + 0 + 28(1 - 2) = 130 - 28 = 102$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 13 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 28 & 7 \end{vmatrix} = -13\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 28\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -13(14 + 5) + 0 - 28(-3 - 4) = -247 + 196 = -51$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 13 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 28 \end{vmatrix} = 13\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 28\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 13(6 - 5) - 0 + 28(3 + 2) = 13 + 140 = 153$$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{102}{51} = 2$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{51}{51} = -1$,

$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{153}{51} = 3$.

Если определитель системы Δ равен нулю и хотя бы один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ отличен от нуля, то данная система линейных уравнений не имеет решения.

Если определитель системы Δ равен нулю и все определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ тоже равны нулю, то система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений.

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

В этом случае все определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ будут равны нулю, так как каждый из них будет содержать один нулевой столбец. И если определитель системы Δ не равен нулю, то система будет иметь лишь нулевое (тривиальное) решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Если определитель системы $\Delta = 0$, то система будет иметь бесконечное множество решений, среди которых будут и ненулевые.

1.5. Решение систем линейных уравнений методом матричного исчисления

Вновь рассмотрим систему линейных уравнений, у которой число неизвестных n равно числу уравнений m. Введем в рассмотрение матрицу-столбец неизвестных (матрицу, в состав которой входит лишь один столбец)

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и матрицу-столбец правых частей

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система линейных уравнений может быть представлена в виде $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$, где A — матрица системы.

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если справедливы соотношения $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Обратной к матрице A является транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы A, деленных на ее определитель $|A|$:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n3}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \frac{A_{3n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix}.$$

Из приведенного выше определения обратная матрица существует только у матриц, определитель которых не равен нулю. Такие матрицы называются невырожденными. Матрицы, определитель которых равен нулю, называются вырожденными.

Умножим систему линейных уравнений, представленную в виде $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ слева, на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}.$$

Учитывая, что $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot \bar{x} = \bar{x}$, получим $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

То есть для получения решения системы линейных уравнений надо матрицу, обратную матрице системы, умножить слева на матрицу-столбец правых частей.

Пример. Решим изложенным выше методом систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}.$$

Найдем матрицу, обратную матрице данной системы уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

для чего вначале вычислим ее определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (18 - 2) - 2 \cdot (12 - 4) + 2 \cdot (2 - 6) = 48 - 16 - 8 = 24.$$

Далее вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы решаемой системы уравнений:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 2 = 16$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 4 = -8$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 4 = 14$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

Используя вычисленные алгебраические дополнения, построим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16}{24} & -\frac{10}{24} & -\frac{2}{24} \\ -\frac{8}{24} & \frac{14}{24} & -\frac{2}{24} \\ -\frac{4}{24} & \frac{1}{24} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}.$$

После этого определим матрицу-столбец неизвестных:

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{16}{24} & -\frac{10}{24} & -\frac{2}{24} \\ -\frac{8}{24} & \frac{14}{24} & -\frac{2}{24} \\ -\frac{4}{24} & \frac{1}{24} & \frac{5}{24} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{16}{24}\cdot 5-\frac{10}{24}\cdot 1-\frac{2}{24}\cdot 11 \\ -\frac{8}{24}\cdot 5+\frac{14}{24}\cdot 1-\frac{2}{24}\cdot 11 \\ -\frac{4}{24}\cdot 5+\frac{1}{24}\cdot 1+\frac{5}{24}\cdot 11 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{80-10-22}{24} \\ \frac{-40+14-22}{24} \\ \frac{-20+1+55}{24} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{48}{24} \\ -\frac{48}{24} \\ \frac{36}{24} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решением данной системы будут значения неизвестных

$$x_1=2\,,\ x_2=-2\,,\ x_3=\frac{3}{2}\,.$$

Необходимо отметить, что данный метод может быть использован при решении систем линейных уравнений, у которых число уравнений равно числу неизвестных и определитель системы не равен нулю.

1.6. Метод Гаусса

Рассмотрим еще один метод решения систем линейных уравнений, который может быть использован при решении любой системы. Этот метод основан на исключении неизвестных из уравнений и приведению системы к виду, в котором каждое уравнение содержит лишь одну неизвестную.

При исключении неизвестных из уравнений можно использовать следующие преобразования, которые позволяют перейти к другой системе линейных уравнений, эквивалентной исходной:

1) менять местами любые два уравнения системы;
2) умножать любое уравнение (то есть все слагаемые, стоящие в левой его части, и его правую часть) на любое число, не равное нулю;
3) прибавлять (или вычитать) к любому уравнению системы любое другое уравнение этой же системы, умноженное на некоторое число.

Рассмотрим конкретный пример и решим методом Гаусса следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -13 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 9x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

Поменяем местами первое и второе уравнения данной системы, чтобы коэффициент при неизвестной x_1 в первом уравнении системы был равен 1. Это упростит дальнейшие преобразования.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -13 \\ 9x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

Исключим неизвестное x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения системы первое уравнение, умноженное на 3, а из третьего уравнения – первое уравнение, умноженное на 9:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 7x_2 - 15x_3 = -31 \\ 16x_2 - 28x_3 = -52 \end{cases}.$$

Разделим третье уравнение полученной системы на 4:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 7x_2 - 15x_3 = -31 \\ 4x_2 - 7x_3 = -13 \end{cases}.$$

Теперь следует исключить неизвестное x_2 из третьего уравнения. Это можно достаточно легко сделать, если коэффициент при x_2 во втором уравнении будет равен 1. Этого можно добиться, разделив второе уравнение системы на 7. Но в этом случае коэффициент второго уравнения при x_3 и его правая часть будут являться дробными числами (равными соответственно $-\frac{15}{7}$ и $-\frac{31}{7}$).

Чтобы избавиться от необходимости работать с дробными числами, поступим иначе. Вычтем из второго уравнения третье уравнение, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_2 - x_3 = -5 \\ 4x_2 - 7x_3 = -13 \end{cases}.$$

В результате получим во втором уравнении системы при неизвестном x_2 коэффициент, равный –1, который тоже вполне устроит.

Прибавим к третьему уравнению полученной системы второе уравнение, умноженное на 4:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_2 - x_3 = -5 \\ -11x_3 = -33 \end{cases}.$$

Делим третье уравнение на -11:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_2 - x_3 = -5 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

Полученный вид системы линейных уравнений называется треугольным видом. Для него характерно отсутствие неизвестного x_1 во всех уравнениях системы, кроме первого, отсутствие неизвестного x_2 во всех уравнениях системы, кроме первого и второго, и так далее.

Исключаем переменное x_3 из первого и второго уравнений. Для этого прибавим ко второму уравнению системы третье уравнение, а из первого уравнения вычтем третье уравнение, умноженное на 3

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ -x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

Теперь для получения решения системы надо исключить неизвестное x_2 из первого уравнения системы. Прибавим к первому уравнению второе уравнение, умноженное на -2, а затем умножим второе уравнение на -1:

$$\begin{cases} x_1 & & & = 1 \\ & x_2 & & = 2 \\ & & x_3 & = 3 \end{cases}.$$

Решим еще одну систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & +5x_5 & = 1 \\ x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +5x_4 & -6x_5 & = 2 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -4x_4 & +11x_5 & = -1 \\ 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & -3x_4 & +16x_5 & = 0 \end{cases}.$$

Поменяем местами первое и второе уравнения системы.

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +5x_4 & -6x_5 & = 2 \\ 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & +5x_5 & = 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -4x_4 & +11x_5 & = -1 \\ 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & -3x_4 & +16x_5 & = 0 \end{cases}.$$

Исключая неизвестное x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений системы, вычтем из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 3, из третьего уравнения системы — первое уравнение, умноженное на 2, и из четвертого уравнения системы — первое уравнение, умноженное на 5:

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +5x_4 & -6x_5 & = 2 \\ & -7x_2 & +9x_3 & -14x_4 & +23x_5 & = -5 \\ & -7x_2 & +9x_3 & -14x_4 & +23x_5 & = -5 \\ & -14x_2 & +18x_3 & -28x_4 & +46x_5 & = 0 \end{cases}.$$

Теперь, чтобы исключить неизвестное x_2 из третьего и четвертого уравнений системы, необязательно добиваться единичного коэффициента при x_2 во втором уравнении. Для этого достаточно из третьего уравнения вычесть второе уравнение, а из четвертого уравнения системы вычесть два вторых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +5x_4 & -6x_5 & = 2 \\ & -7x_2 & +9x_3 & -14x_4 & +23x_5 & = -5 \\ & 0x_2 & +0x_3 & -0x_4 & +0x_5 & = 0 \\ & 0x_2 & +0x_3 & -0x_4 & +0x_5 & = 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что два последних уравнения системы удовлетворяются при любых значениях входящих в них неизвестных. Поэтому их можно исключить из системы:

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +5x_4 & -6x_5 & = 2 \\ & -7x_2 & +9x_3 & -14x_4 & +23x_5 & = -5 \end{cases}.$$

Полученный вид системы является треугольным. Он содержит два уравнения и пять неизвестных. Для решения систем уравнения в таких случаях, когда треугольный вид их содержит больше неизвестных, чем уравнений, все неизвестные делятся на базисные и свободные. Число базисных неизвестных должно равняться числу уравнений системы. Причем в качестве базисных можно выбирать такие неизвестные, коэффициенты которых образуют определитель, отличный от нуля. Например, в данном случае в качестве базисных неизвестных можно выбрать x_1 и x_2, так как определитель при этих неизвестных не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 0 = -7 \neq 0 .$$

Оставшиеся свободные неизвестные переносятся в правую часть уравнений с противоположным знаком:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 + 2 \\ \quad\;\; -7x_2 = -9x_3 + 14x_4 - 23x_5 - 5 \end{cases}.$$

Полученную систему решают относительно базисных переменных x_1 и x_2.

Разделим второе уравнение системы на -7:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 + 2 \\ \qquad\;\; x_2 = \frac{9}{7}x_3 - 2x_4 + \frac{23}{7}x_5 + \frac{5}{7} \end{cases}.$$

Исключая неизвестное x_2 из первого уравнения, вычитая из первого уравнения второе уравнение системы, умноженное на 3, получим окончательное решение:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}x_3 + x_4 - \frac{27}{7}x_5 - \frac{1}{7} \\ x_2 = \frac{9}{7}x_3 - 2x_4 + \frac{23}{7}x_5 + \frac{5}{7} \end{cases}.$$

Полученное решение называется общим решением системы линейных уравнений.

В нем свободные неизвестные x_3, x_4, x_5 могут принимать любые значения. Присваивая неизвестным x_3, x_4, x_5 конкретные числовые значения, будем получать решения данной системы, которые называются частными. Например, полагая $x_3 = 1, x_4 = -3, x_5 = 5$, получим

$$x_1 = \frac{1}{7}\cdot 1 - 3 - \frac{27}{7}\cdot 5 - \frac{1}{7} = \frac{1}{7} - \frac{21}{7} - \frac{135}{7} - \frac{1}{7} = -\frac{156}{7}$$

$$x_2 = \frac{9}{7}\cdot 1 - 2\cdot(-3) + \frac{23}{7}\cdot 5 + \frac{5}{7} =$$

$$= \frac{9}{7} + \frac{42}{7} + \frac{115}{7} + \frac{5}{7} = \frac{171}{7}.$$

Тогда частным решением системы будет

$$x_1 = -\frac{156}{7},\ x_2 = \frac{171}{7},\ x_3 = 1,\ x_4 = -3,\ x_5 = 5.$$

1.7. Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Число x называется действительной частью числа z и обозначается $Re(z)$, а число y — мнимой частью числа z и обозначается $Im(z)$, т.е. $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.

Действительное число x является частным случаем комплексного $z = x + iy$ при $y = 0$. Комплексные числа вида $z = iy$ называются чисто мнимыми.

Геометрически комплексные числа можно интерпретировать как точки комплексной плоскости (см. рис. 1).

Наряду с приведенным выше представлением комплексных чисел $z = x + iy$, которое называется алгебраической формой комплексного числа, применяется еще и тригонометрическая форма

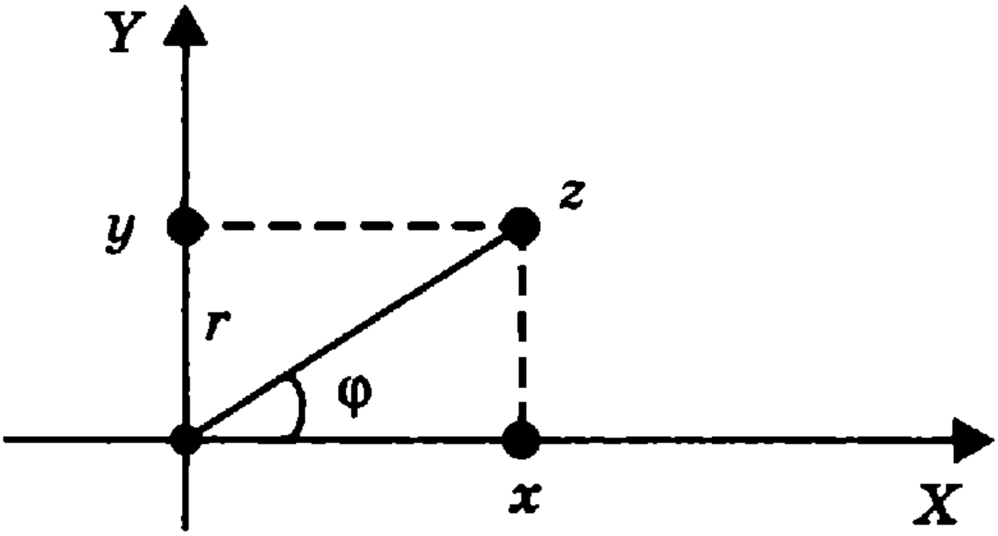


Рис. 1

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где величина $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа, а величина $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ — аргументом комплексного числа. Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ (k — любое целое число).

Числа $z = x + iy$ и $z = x - iy$ называются комплексно сопряженными.

Два комплексных числа в алгебраической форме $z_1 = z_1 + iy_1$ и $z_2 = z_2 + iy_2$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2$, если $Re(z_1) = Re(z_2)$, $Im(z_1) = Im(z_2)$.

Два комплексных числа в тригонометрической форме считаются равными, если равны их модули, а аргументы отличаются на величину $2\pi k$ (k — любое целое число).

Если $\qquad z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

и $$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
то из $z_1 = z_2$ следует $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$.

1.8. Операции над комплексными числами

Суммой комплексных чисел называется комплексное число, действительная часть которого равна сумме действительных частей, а мнимая часть равна сумме мнимых частей суммируемых комплексных чисел.

Значит, если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Пример. Даны два комплексных числа $z_1 = 3 + 5i$ и $z_2 = -1 + 7i$. Тогда $z_1 + z_2 = 2 + 12i$.

Аналогичным образом определяется разность комплексных чисел

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Перемножение двух комплексных чисел выполняется с помощью обычного «раскрытия скобок» с последующим выделением вещественной и мнимой частей (при этом следует учесть, что $i_2 = -1$):

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 +$$

$$+ ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Пример. Пусть $z_1 = 1 - 3i$ и $z_2 = 5 + i$. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - 3i)(5 + i) = 5 + i - 15i - 3i^2 = 8 - 14i.$$

При делении комплексных чисел результат представляют в виде дроби, после чего числитель и знаменатель этой дроби умножают на число, комплексно сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = -1 + 5i$. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i}{-1 + 5i} = \frac{(3 + i)(-1 - 5i)}{(-1 + 5i)(-1 - 5i)} =$$

$$= \frac{-3 - 15i - i + 5}{1 + 25} = \frac{2 - 16i}{26} = \frac{1}{13} - i\,\frac{8}{13}.$$

При возведении комплексного числа в степень оно представляется в тригонометрической форме, после чего модуль комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на эту степень:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Пример. Возведем в третью степень число $z = 5 + 5i$. Модуль этого числа равен

$$r = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

а аргумент $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{5}{5} = \mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$.

Тригонометрическая форма числа имеет вид

$$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда $z^3 = (5\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$

$$= 250\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -250 + 250i.$$

Для извлечения из комплексного числа корня n-й степени его также представляют в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, учитывая, что аргумент определяется с точностью до слагаемого вида $2\pi k$

$$z = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$$

и для получения результата w находят арифметический корень n-й степени из его модуля, а его аргумент делится на n. Окончательно получаем n различных значений для корня n-й степени из комплексного числа:

$$w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)$$

$$w_3 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{n}\right)$$

. . . .

$$w_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n}\right)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Уравнения прямой на плоскости

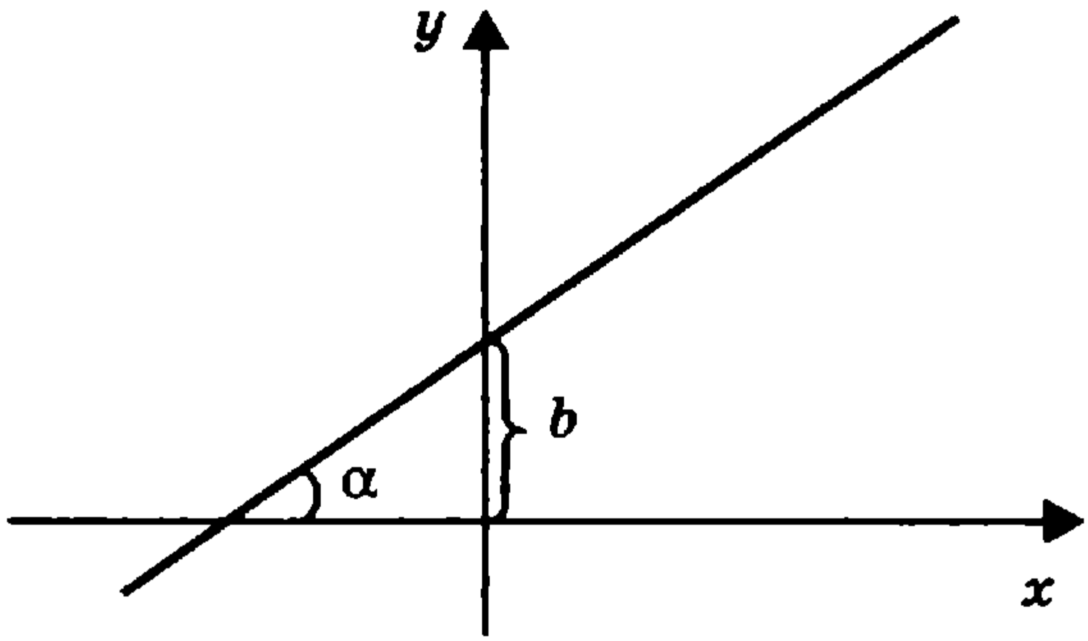


Рис. 2

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где $k = \mathrm{tg}\alpha$ — тангенс угла наклона прямой к оси OX, b — длина отрезка, отсекаемого прямой от оси OY, взятая со знаком плюс, если отрезок расположен выше оси OX, и со знаком минус в противном случае.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом можно представить иначе в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где x_0, y_0 — координаты точки, лежащей на данной прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases},$$

где $\bar{p} = (m; n)$ — направляющий вектор; $M_0(x_0, y_0)$ — точка, лежащая на прямой.

Пусть известны уравнения двух пересекающихся прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Тогда острый угол φ между указанными прямыми определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны $k_1 = k_2$.

Если прямые перпендикулярны, то $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$.

Если $B \neq 0$, то уравнение линии может быть представлено как уравнение с угловым коэффициентом $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Если $B = 0$, а $A \neq 0$, то уравнение прямой приобретает вид $x = -\frac{C}{A}$. Это прямая, параллельная оси OY и отстоящая от нее на $\frac{C}{A}$ единиц влево при $\frac{C}{A} > 0$ и на столько же единиц вправо при $\frac{C}{A} < 0$.

Если $B \neq 0$, а $A = 0$, уравнение представимо в виде $y = -\frac{C}{B}$. В данном случае прямая параллельна оси OX и отстоит от нее на $\frac{C}{B}$ единиц. Причем прямая проходит выше оси OX, если $\frac{C}{B} < 0$, и ниже оси OX, если $\frac{C}{B} > 0$.

Пусть задано уравнение прямой в общем виде $Ax + By + C = 0$, и координаты точки $M_0(x_0, y_0)$, не лежащей на этой прямой. Тогда расстояние от указанной точки до данной прямой определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2.2. Кривые второго порядка

Общее уравнение кривых второго порядка имеет вид $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ — фокусы эллипса.

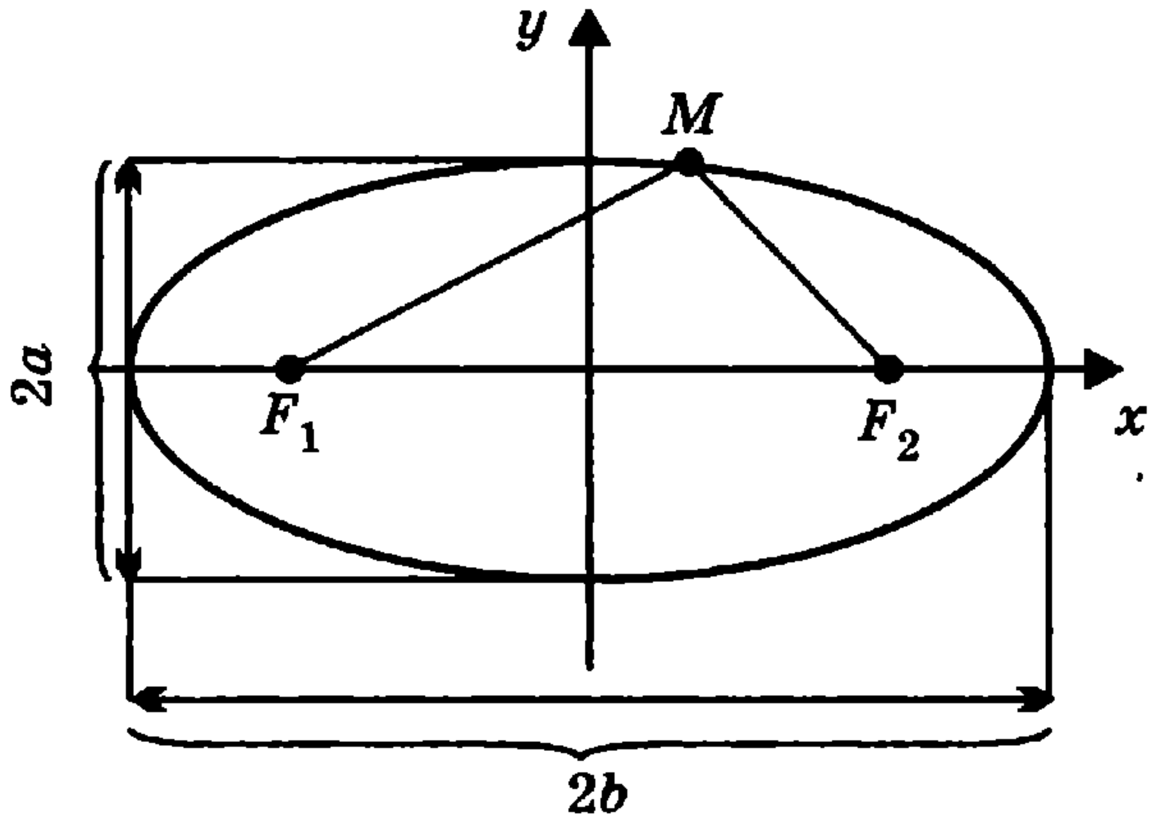


Рис. 3

Величины a и b называются, соответственно, большой и малой полуосью эллипса.

Соотношение $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ выполняется для любой точки M эллипса, $b^2 = c^2 - a^2$.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует степень сжатия или растяжения эллипса вдоль оси OY. Чем меньше эксцентриситет, тем эллипс более вытянут вдоль оси OY.

Полагая $a = b$, получим уравнение окружности радиуса a: $x^2 + y^2 = a$.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

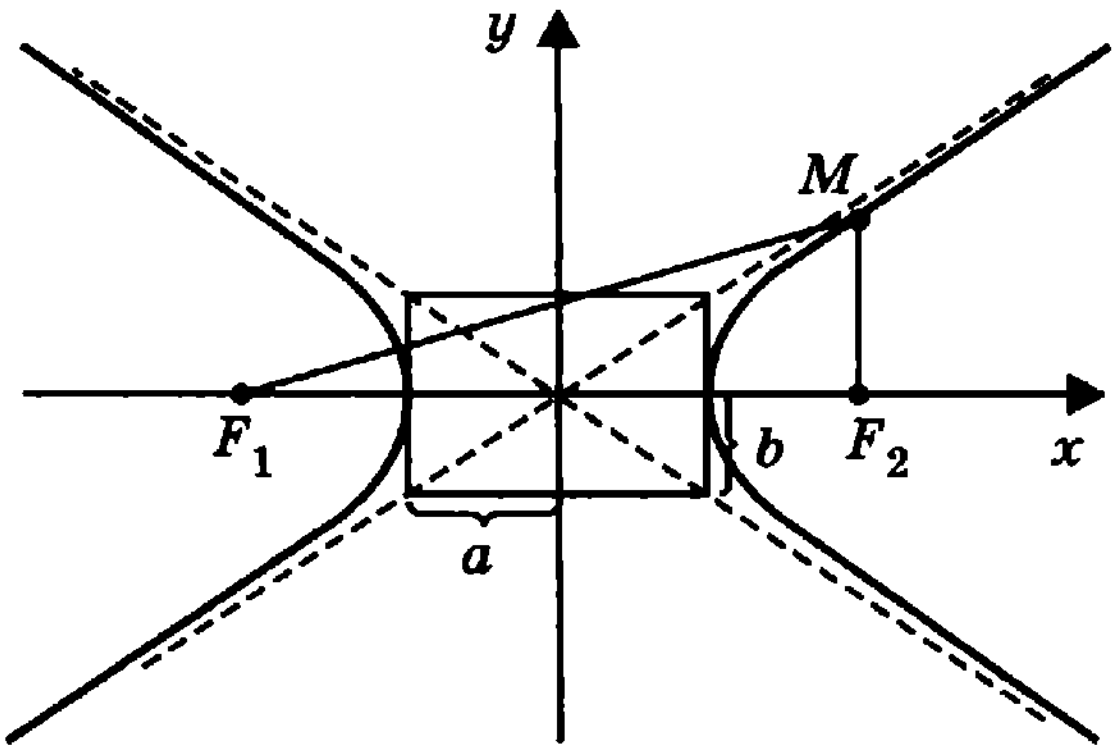


Рис. 4

Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусы гиперболы располагаются в точках $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$, $b^2 = c^2 - a^2$.

Соотношение $\left\| F_1M \right| - \left| F_2M \right\| = 2a$ выполняется для любой точки M эллипса.

Прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, изображенные на рисунке пунктирной линией, к которым приближается гипербола по мере удаления от начала координат, называются асимптотами гиперболы.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ называется эксцентриситетом гиперболы. Эксцентриситет характеризует степень сжатия или растяжения гиперболы вдоль оси OY.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, одинаково удаленных от заданной прямой, называемой директрисой, и от данной точки, называемой фокусом.

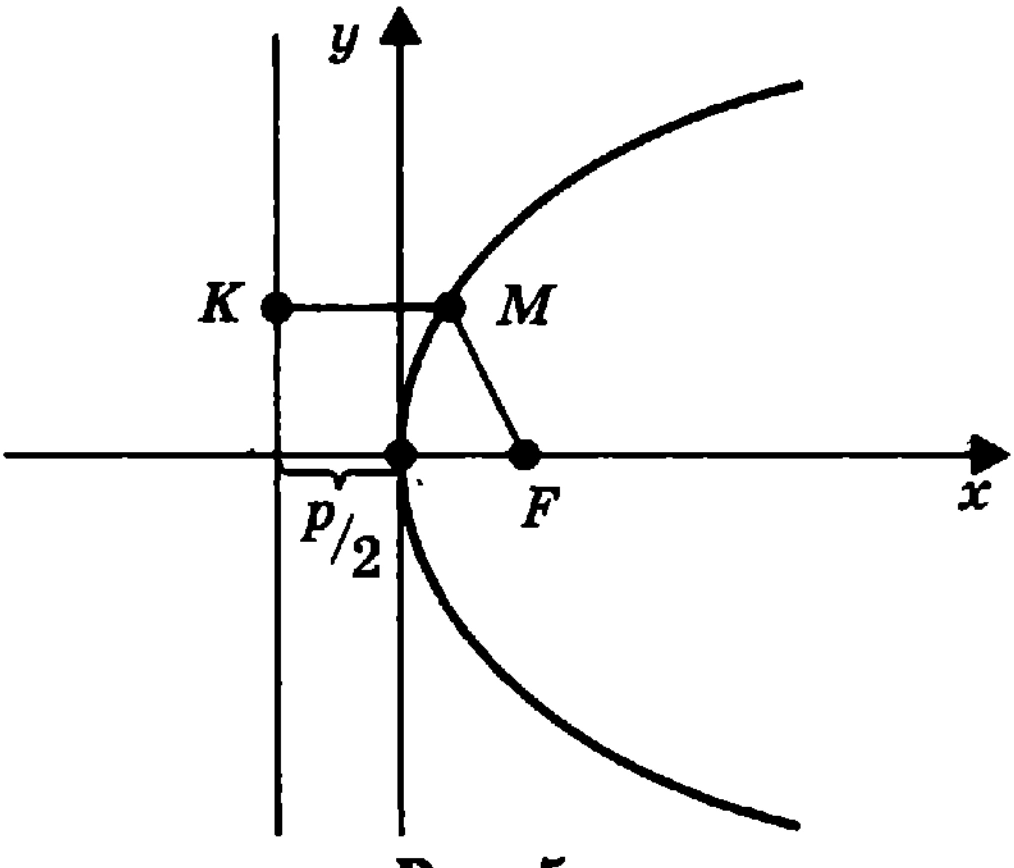


Рис. 5

Уравнение параболы $y^2 = 2px$, где p — параметр параболы.

Фокус параболы расположен в точке $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

Для любой точки M параболы выполняется соотношение $|KM| = |MF|$.

2.3. Векторное исчисление

Вектором называется направленный отрезок или упорядоченная совокупность двух точек.

Обозначается $\overline{AB}$ или одной буквой латинского алфавита $\vec{a}$. Длина отрезка называется длиной или модулем вектора.

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, их длины равны и они направлены в одну и ту же сторону.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось u называется длина отрезка этой оси, расположенного между точками A_1 и B_1, которые являются проекциями на данную ось точек A и B.

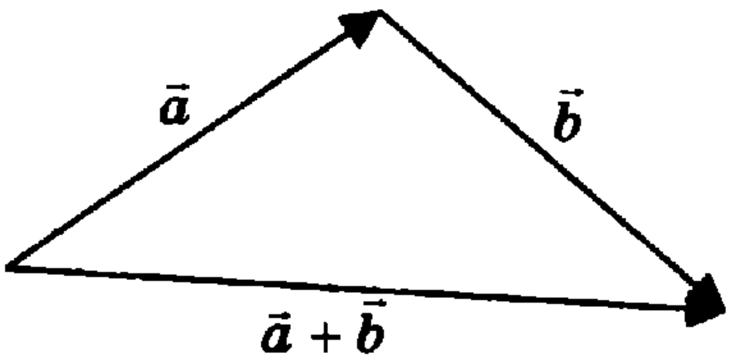
Если направление отрезка A_1B_1 совпадает с направлением оси u, то проекция считается положительной, в противном случае проекция считается отрицательной.

Проекции вектора на оси координат называются его координатами. Вектор однозначно определяется своими координатами $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Введем единичные вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленные вдоль осей координат (вектор $\vec{i}$ направлен вдоль оси OX, вектор $\vec{j}$ направлен вдоль оси OY, вектор $\bar{k}$ направлен вдоль оси OZ).

Тогда вектор $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ можно представить в виде $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

2.4. Операции над векторами

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$, начало которого совмещено с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, если конец вектора $\vec{a}$ совмещен с началом вектора $\vec{b}$.



При сложении векторов их соответствующие координаты складываются. Если имеем два вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ будет иметь координаты $\vec{c} = (a_x + b_x;\ a_y + b_y; a_z + b_z)$.

Свойства операции сложения векторов:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
3. Существует вектор $\vec{0}$ (нуль вектор), который, будучи прибавленным к любому другому вектору, не меняет его $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
4. Для каждого вектора $\vec{a}$ существует вектор $-\vec{a}$, называемый противоположным, такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $k\vec{a}$, длина которого в $|k|$ раз больше длины вектора $\vec{a}$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $k > 0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$ в противном случае.

При умножении вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ на число k каждая его координата умножается на k

$$k\vec{a} = (ka_x; ka_y; ka_z).$$

Свойство операции умножения вектора на число:

1. $k(n\vec{a}) = (kn)\vec{a}$, k и n — числа.
2. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
3. $(k + n)\vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$, k и n — числа.
4. $1\vec{a} = \vec{a}$.

Скалярным произведением вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ на вектор $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ называется число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла φ между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $k\vec{a} \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$, k — некоторое число.
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, причем $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, только если $\vec{a} = \bar{0}$.

Модуль вектора и его свойства

Модуль вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

1. $|\vec{a}| \geq 0$, причем $|\vec{a}| = 0$, только если $\vec{a} = \bar{0}$.
2. $|k\vec{a}| = k|\vec{a}|$.
3. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
4. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Угол φ между векторами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\ .$$

Два вектора будут ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.

2.5. Плоскость

Пусть вектор $\vec{N}(A; B; C)$ — вектор нормали к рассматриваемой плоскости (перпендикулярен данной плоскости), а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, лежащая на этой плоскости.

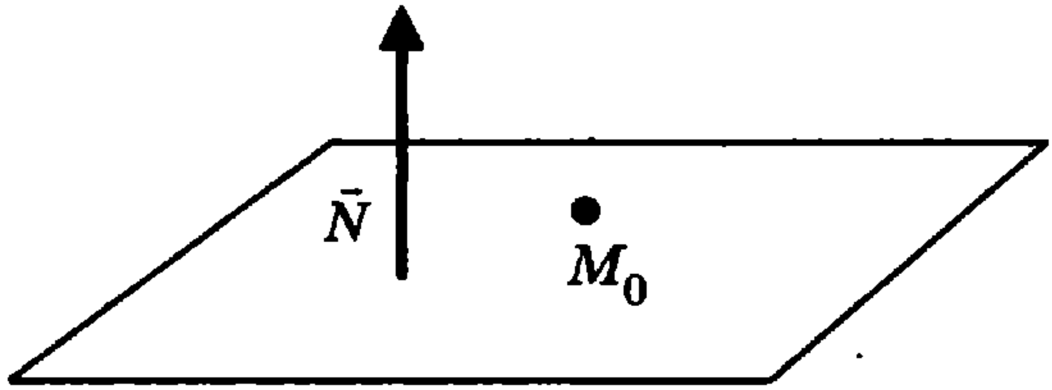
Тогда уравнение плоскости будет иметь вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Общий вид уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C — координаты вектора нормали.



Если даны уравнения двух плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\text{и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то угол φ между этими плоскостями определяют из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Данные плоскости будут параллельны, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Данные плоскости будут перпендикулярны, если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Если задано уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащей на плоскости, то расстояние d от данной точки до указанной плоскости определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.6. Прямая в пространстве

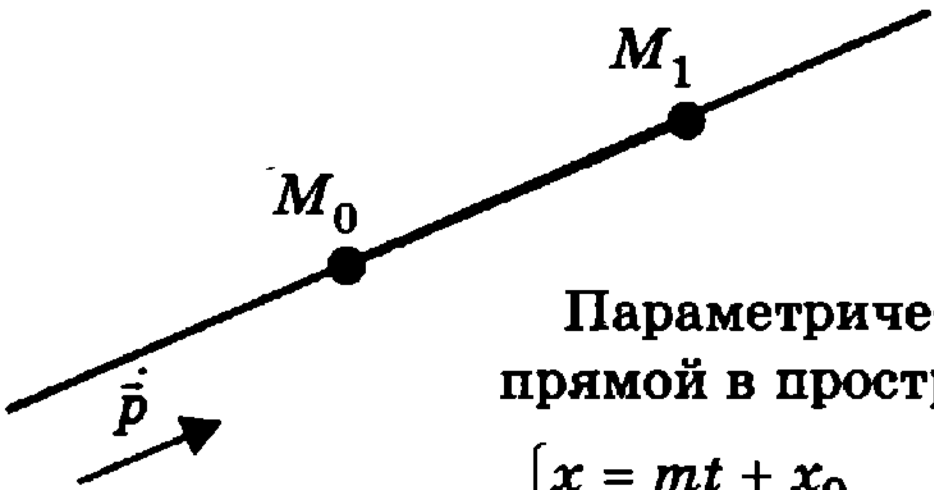
Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой, $\vec{p}(m; n; l)$ — направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$



Параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = lt + z_0 \end{cases}.$$

Векторное уравнение прямой в пространстве:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{p},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор текущей точки прямой $M(x, y, z)$, $\vec{r}_0$ — радиус-вектор точки прямой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, t — параметр, каждому значению которого соответствует некоторая точка прямой $(-\infty < t < +\infty)$.

Пусть заданы канонические уравнения двух пересекающихся прямых

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1}$$

и
$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{l_2}.$$

Тогда угол φ между этими прямыми определяется из соотношения

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+l_1l_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}}.$$

Прямые будут параллельны, если $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{l_1}{l_2}$.

Прямые будут перпендикулярны, если

$$m_1m_2+n_1n_2+l_1l_2=0.$$

Пусть заданы уравнения плоскости $Ax+By+$ $+Cz+D=0$ и каноническое уравнение прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$. Тогда угол ϕ между прямой и плоскостью определяется из соотношения

$$\sin\phi=\frac{Am+Bn+Cl}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+l^2}}.$$

Если выполняется соотношение $Am+Bn+Cl=0$, то прямая параллельна плоскости.

Если выполняется соотношение $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{l}$, то прямая перпендикулярна плоскости.

3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Говорят, что на множестве X задана функция y, с областью изменения Y ($y \in Y$), если задан закон или правило, по которому каждому числу x из множества X ($x \in X$) ставится в соответствие определенное число y из множества Y.

Множество X называется областью определения функции, x — независимая переменная (аргумент).

Тот факт, что зависимая переменная y является функцией независимой переменной x, обозначается как $y = y(x)$.

Графиком функции называется множество точек координатной плоскости с координатами $(x, y(x))$.

Пусть задана функция $y = y(u)$, с областью определения $u \in U$ и областью изменения $y \in Y$ и функция $u = \varphi(x)$, с областью определения $x \in X$ и областью изменения U. Тогда каждому $x \in X$ можно поставить в соответствие определенное число y из множества Y по закону $y = y(\varphi(x))$. В этом случае говорят, что на множестве X определена сложная функция (или суперпозиция функций $y = y(u)$ и $u = \varphi(x)$) $y = y(\varphi(x))$ (то есть функция, у которой аргументом является другая функция).

Пример. Пусть $y = \sqrt{u+5}$, а $u = \varphi(x) = \cos x$. Тогда получим сложную функцию $y = \sqrt{\cos + 5}$.

Пусть на множестве X определена некоторая функция $y = f(x)$ с областью изменения Y. Если каждому значению $y \in Y$ можно поставить в соответствие единственное значение $x \in X$, то говорят, что на множестве Y определена функция $x = f^{-1}(y)$ с областью изменения X, которая называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

Пример. Функция $y = \sin x$, определенная на множестве $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, имеет обратную функцию $x = \arcsin y$, определенную на множестве $[-1; 1]$.

Функция $f(x)$ называется ограниченной на некотором множестве X, если существует такое число M, что для всех $x \in X$ справедливо соотношение $|f(x)| \le M$

3.1. Предел функции

Дельта-окрестностью $U_\delta(a)$ точки a называется множество точек x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ или, что то же самое,

$$a - \delta < x < a + \delta,\ \delta > 0.$$

Другими словами, это множество точек, удаленных от точки a на расстояние меньшее, чем δ.

Точка a называется предельной точкой множества X, если в любой ее дельта-окрестности $U_\delta(a)$ содержится бесконечное множество точек из X.

Пусть на некотором множестве X определена функция $f(x)$ и точка a является предельной точкой множества X.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет предел, равный A, при x, стремящемся к a $(x \to a)$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ будет выполняться, как только $|x - a| < \delta$

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Из определения следует, что предел постоянной величины равен самой величине

$$\lim_{x \to a} C = C.$$

Иногда приходится рассматривать пределы, когда переменная x стремится к бесконечности $(x \to \infty)$, т.е. принимает сколь угодно большие положительные или сколь угодно большие по модулю отрицательные значения. В этом случае определение предела несколько изменится.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет предел, равный A, при x, стремящемся к ∞, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число $N > 0$, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ будет выполняться, как только $|x| > N$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

То есть бесконечно малая величина — это такая величина, которая в процессе своего изменения может принимать сколь угодно малые значения. Говоря, что некоторая величина является бесконечно малой, надо указывать, к чему при этом должен стремиться ее аргумент x. Например, величина $\alpha(x) = \sin(x)$ будет бесконечно малой при $x \to 0$ ($\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$), но эта величина не будет бесконечно малой при $x \to \frac{\pi}{2}$, так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

3.2. Теоремы о бесконечно малых

Теорема 1. Конечная сумма бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Теорема 2. Произведение бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Теорема 3. Произведение бесконечно малых величин на ограниченную функцию есть величина бесконечно малая.

3.3. Теоремы о пределах

Теорема 1. Предел алгебраической суммы функций, имеющих предел, равен такой же сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 2. Предел произведения функций, имеющих предел, равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x).$$

Теорема 3. Предел отношения двух функций имеющих предел, равен отношению пределов этих функций, если предел делителя не равен нулю.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0 .$$

3.4. Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

В более общем виде первый замечательный предел может быть представлен следующим образом: $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, где $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Из первого замечательного предела можно получить другие пределы, являющиеся его следствием:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{x} = 1, \ \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{arctg} x}{x} = 1, \ \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Первый замечательный предел и его следствия применяются при вычислении пределов, содержащих неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то есть когда под знаком предела стоит дробь, у которой числитель и знаменатель стремятся к нулю.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2+3x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2(1+3x)}=$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+3x}=1$.

3.5. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\text{ , } e\approx 2,71$$

В более общем виде второй замечательный предел может быть представлен следующим образом: $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\alpha(x)\right)^{1/\alpha(x)}=e$, где $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to a$.

Из второго замечательного предела тоже можно получить другие пределы, являющиеся его следствием:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Второй замечательный предел применяется при вычислении пределов, содержащих неопределенность вида 1^∞, то есть, когда под знаком предела стоит величина стремящаяся к единице, которая возводится в степень, стремящуюся к бесконечности.

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x+7}{x+5}-1\right)^{2x}=$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{2x}.$$

Под знаком предела выражение в скобках соответствует второму замечательному пределу, так как оно представляет собой сумму единицы и бесконечно малой $\alpha(x) = \dfrac{2}{x+5}$. Чтобы все выражение соответствовало второму замечательному пределу, необходимо, чтобы выражение в скобках возводилось в степень $\dfrac{1}{\alpha(x)} = \dfrac{x+5}{2}$.

Для этого степень умножим и разделим на $\dfrac{x+5}{2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{2}2x\frac{2}{x+5}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{4x}{x+5}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{4}{1+5/x}} = e^4.$$

3.6. Сравнение бесконечно малых

Бесконечно малые величины можно сравнивать по скорости их стремления к нулю.

Если $\alpha(x)$ и $\delta(x)$ — две бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что бесконечно малая $\alpha(x)$

есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем бесконечно малая $\delta(x)$.

Если $\alpha(x)$ и $\delta(x)$ — две бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$, где k — постоянная, то говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\delta(x)$ есть бесконечно малые одного порядка малости.

Если $\alpha(x)$ и $\delta(x)$ — две бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\delta(x)$ эквивалентные бесконечно малые $\alpha(x)\sim\delta(x)$.

Учитывая приведенные выше пределы, можно указать следующие эквивалентные бесконечно малые при $x\to 0$:

$$\sin x \sim \mathrm{tg}x \sim \mathrm{arctg}x \sim \arcsin x \sim \ln(1+x) \sim e^x-1 \sim x.$$

Теорема. Предел отношения функций равен пределу отношения их эквивалентных.

Эта теорема позволяет при вычислении пределов заменять функции их эквивалентными величинами.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\ln(1+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}.$$

Кроме неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и 1^{∞}, которые встречались в ранее рассмотренных пределах, существуют неопределенности других видов.

Неопределенность вида $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})} = 0.$$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+6}{5x^2-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}}{5-\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{5}.$$

Неопределенность вида $\infty \cdot 0$

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\frac{x+1}{x+5x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x+1}{1+5x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{1+5x^2} = 1.$$

3.7. Односторонние пределы

Пусть точка a является предельной точкой множества X, на котором определена функция $f(x)$.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет предел, равный A, при x, стремящемся к a справа ($x \to a+0$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$ будет выполняться, как только $a < x < a+\delta$.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A$$

То есть x стремится к a, оставаясь все время больше a. Такой предел называют правым односторонним пределом.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет предел, равный A при x, стремящемся к a слева ($x \to a - 0$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ будет выполняться, как только $a - \delta < x < a$.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A$$

В этом случае x стремится к a, оставаясь все время меньше a, и предел называют левым односторонним пределом.

3.8. Непрерывность функций

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и точка x_0 является предельной точкой этого множества. Дадим приращение Δx этому значению аргумента $x_0 + \Delta x$ (Δx — некоторое число, причем такое, что точка $x_0 + \Delta x$ тоже принадлежит множеству X).

Приращением функции $f(x)$ в точке x_0 называется разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Приведенные выше два определения непрерывности функции в точке являются эквивалентными, то есть если функция является непрерывной по одному из этих определений, то она будет непрерывной и в силу другого определения.

Функция называется непрерывной на некотором множестве X, если она является непрерывной в каждой точке этого множества.

Чтобы проще можно было представить себе понятие непрерывной функции, следует запомнить, что график функции, непрерывной на некотором множестве, можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги.

3.9. Операции над непрерывными функциями

1. Алгебраическая сумма непрерывных в некоторой точке функций есть функция, непрерывная в этой же точке.

2. Произведение непрерывных в некоторой точке функций есть функция непрерывная в этой же точке.

3. Отношение двух непрерывных в некоторой точке функций есть функция непрерывная в этой же точке, если делитель в данной точке не равен нулю.

4. Пусть некоторая функция $f(x)$ представляет собой суперпозицию функций $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, причем функция $y = f(u)$ является непрерывной в точке $u = u_0$, функция $u = \varphi(x)$ является непрерывной в точке x_0 и $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0.

3.10. Теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0 и положительна (отрицательна) в этой точке, то она будет принимать положительные (отрицательные) значения в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором замкнутом ограниченном множестве x, то он достигает на нем своего наименьшего и наибольшего значений.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве X и принимает в двух точках a и b этого множества разные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$ (допустим, что $A < B$). Тогда каким бы ни было число C, заключенное между A и B, найдется точка c такая, что $f(c) = C$.

3.11. Точки разрыва

Если нарушено хотя бы одно из условий непрерывности функции в некоторой точке, то говорят, что в этой точке функция терпит разрыв. А сама эта точка называется точкой разрыва. Существуют три типа точек разрыва.

1. **Точка устранимого разрыва**. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но в самой точке функция или не определена, или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Пример. Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x_0 = 0$ имеет устранимый разрыв, так как она не определена в этой точке, хотя соответствующий предел существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Разрыв в точке $x_0 = 0$ можно устранить, доопределив функцию и положив $y(0) = 1$.

Поэтому такие точки называются точками устранимого разрыва.

2. **Точка разрыва первого рода**. Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке функция имеет конечные, но не равные друг другу односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Разность этих пределов $\Delta = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ называют скачком функции.

Пример.

Функция $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \\ 1, \text{ если } x > 0 \end{cases}$.

График этой функции имеет вид

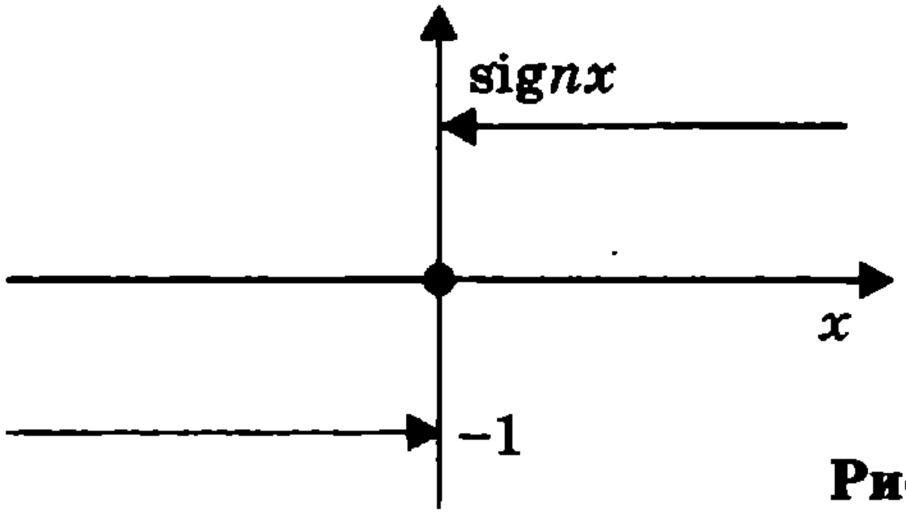


Рис. 6

Имеем $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sign}(x) = -1$, а $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sign}(x) = 1$.

3. Точка разрыва второго рода. Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке не существует или бесконечен хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Пример. Функция $y = \dfrac{1}{x-1}$ в точке $x_0 = 1$ имеет левый односторонний предел $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$,

а правый односторонний предел $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$,

следовательно точка $x_0 = 1$ есть точка разрыва второго рода.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Определение. Если существует предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в точке x_0 к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю, то этот предел называется производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$$

4.1. Производные элементарных функций

1. $C' = 0$, C — постоянная.
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, α — действительное число.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$ и $a \neq 1$.
4. $(e^x)' = e^x$.
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$ и $a \neq 1$.
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
7. $(\sin x)' = \cos x$.
8. $(\cos x)' = -\sin x$.
9. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
10. $(\mathrm{ctg} x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

4.2. Правила вычисления производной

1. Производная алгебраической суммы функций, имеющих производную, равна такой же сумме производных этих функций

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

Пример. $(\cos x - \ln x) = \cos' x - \ln' x = -\sin x + \dfrac{1}{x}$.

2. Производная произведения двух функций, имеющих производную, вычисляется по формуле

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Пример. $(\sin x \cdot \ln x) = \sin' x \ln x + \sin x \ln' x =$

$$= \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}.$$

3. Производная отношения двух функций, имеющих производную, вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Пример. $\left(\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}\right)' = \dfrac{\mathrm{arctg}'x \cdot x - x' \cdot \mathrm{arctg}x}{x^2} =$

$$= \frac{\dfrac{x}{1+x^2} - \mathrm{arctg}x}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\mathrm{arctg}x}{x^2(1+x^2)}.$$

4. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ имеет производ-ную в точке u_0, причем $u_0 = \varphi(x_0)$, сложная функция $y = f(\varphi(x))$ будет иметь производную в точке x_0 и $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Пример. Вычислим производную сложной функции $y = e^{\cos x}$. В данном случае $y = y(u)e^u$, а $u = \varphi(x) = \cos x$. Тогда $\dfrac{dy}{du} = e^u$, а $\dfrac{du}{dx} = -\sin x$, следовательно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u(-\sin x) = -e^{\cos x}\sin x.$$

5. Производная функции, заданной параметрически, то есть в виде соотношения $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t изменяется в пределах некоторого множества, определяется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

Пример. Найдем производную следующей функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = t^2 + 3t - 1 \end{cases}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t+3}{3t^2-2}.$$

Таким образом производная параметрически заданной функции будет тоже функция, заданная параметрически

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t+3}{3t^2-2} \end{cases}.$$

4.3. Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда ее производная в этой точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке x_0.

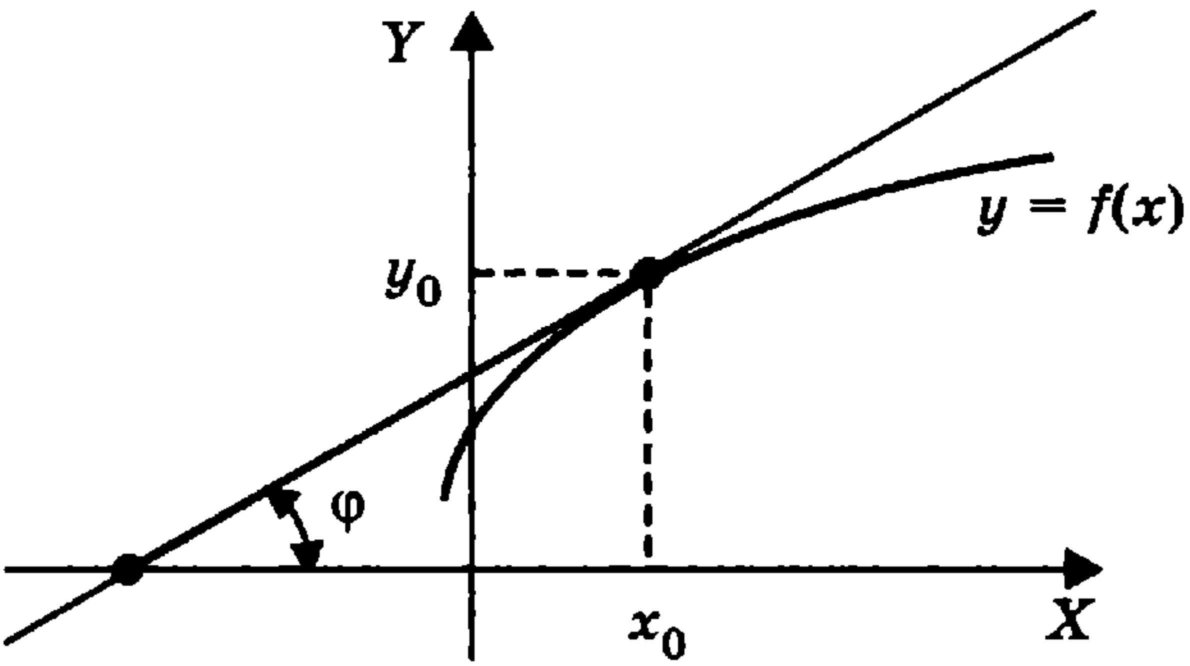


Рис. 7

4.4. Дифференциал функции. Теорема о дифференцируемых функциях

Рассмотрим приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0 и представим его в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем Δx.

Главная линейная по Δx часть приращения функции $A\Delta x$ называется ее дифференциалом $df(x)$

$$df(x) = A\Delta x = f'(x)dx.$$

Функция, имеющая дифференциал в некоторой точке, называется дифференцируемой, а операция определения дифференциала называется дифференцированием.

Определение. Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если существует некоторая окрестность $U_\delta(x_0)$ этой точки, для всех точек которой справедливо неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если существует некоторая окрестность $U_\delta(x_0)$ этой точки, для всех точек которой справедливо неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

Точки локального максимума и минимума функции имеют общее название точек экстремума.

Теорема Ферма. Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, и если в этой точке существует производная, то она равна нулю.

Геометрически эту теорему можно интерпретировать следующим образом: касательная, проведенная к графику функции, в точке экстремума имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает на концах данного интервала одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in [a, b]$, такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля: если функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то на отрезке $[a, b]$ существует хотя бы одна точка, в которой касательная, проведенная к графику функции, параллельна оси абсцисс.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, имеют производные на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка $c \in (a, b)$, в которой $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка, в которой касательная, проведенная к графику функции $f(x)$, будет параллельна хорде, стягивающей концы графика данной функции, построенного на отрезке $[a, b]$.

4.5. Правило Лопиталя

Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a и в некоторой ее окрестности, имеют производные в окрестности точки a, причем $g'(a) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел отношения функций $f(x)$ и $g(x)$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

Числитель и знаменатель выражения, стоящего под знаком предела при $x \to 0$, стремятся к нулю, и, следовательно, к данному пределу применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x\cos x}.$$

Полученное под знаком предела выражение опять представляет собой отношение двух бесконечно малых величин, к которому еще раз можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(\sin x + x\cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x - x\sin x}.$$

Теперь числитель выражения, стоящего под знаком предела, стремится к 1, а знаменатель — к 2 при $x \to 0$.

Значит $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

Данное правило будет справедливо и в том случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то есть когда имеем дело с неопределенностью $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$

В данном случае имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$, и к данному пределу можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x})'}{(\ln^2 x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{2\ln x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{4\ln x}.$$

Опять имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$, и еще раз применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{4\ln x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x})'}{(\ln x)'}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty.$$

4.6. Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций

Определение. Функция $f(x)$ называется возрастающей на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, таких что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется убывающей на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$, имеющая производную, возрастала на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы всюду на этом интервале выполнялось неравенство $f'(x) \ge 0$. А для того чтобы функция $f(x)$, имеющая производную, убывала на том же интервале, необходимо и достаточно, чтобы всюду на (a, b) выполнялось неравенство $f'(x) \le 0$.

Теорема. Если при переходе через точку x_0, в которой $f'(x_0) = 0$, знак производной $f'(x)$ меняется с «минуса» на «плюс», то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум, если знак меняется с «плюса» на «минус», то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум. Если при переходе через точку x_0 знак производной не меняется, то в этой точке функция $f(x)$ не имеет экстремума.

Пример. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, которая определена на всей действительной оси, и найдем ее интервалы возрастания и убывания, а также экстремумы. Для этого вычислим ее первую производную:

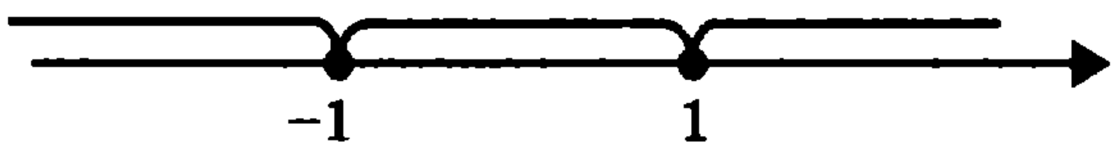
$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x' \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Далее найдем нули числителя и знаменателя производной $1 - x^2 = 0$, $x^2 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Так как $1 + x^2 \neq 0$, знаменатель в нуль не обращается.

Отметим найденные нули на числовой оси:



В результате числовая ось разобьется на три интервала $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$. На каждом интервале производная функции y' будет сохранять знак (то есть будет во всех точках интервала или положительной или отрицательной). Для того чтобы определить знак производной на интервале, надо вычислить ее значение в какой-либо точке этого интервала. Так, например, в точке $x = -2$, принадлежащей интервалу $(-\infty, -1)$, значение производной $y'(-2) = \dfrac{1-4}{(1+4)^2} = -\dfrac{3}{25} < 0$. Значит, на всем интервале $(-\infty, -1)$ производная отрицательна и функция на нем убывает.

Аналогично, вычислив $y'(0) = 1 > 0$ и учитывая, что точка $x = 0$ принадлежит интервалу $(-1, 1)$, можно сделать вывод, что производная на интервале $(-1, 1)$ положительна и функция на нем возрастает.

Вычислив значение производной $y'(3) = -\dfrac{8}{100} < 0$, делаем вывод, что на интервале $(1, +\infty)$, которому принадлежит точка $x = 3$, производная функции отрицательна и функция убывает.

Так как производная функции при переходе через точку $x = -1$ меняет знак с «минуса» на «плюс», в этой точке функция имеет минимум. Для того чтобы найти этот минимум следует подставить значение $x = -2$ в функцию $y_{\min} = y(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

При переходе через точку производная меняет знак с «плюса» на «минус» и значит в точке $x = 1$ функция имеет максимум, равный $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ на интервале (a, b) выпукла, если касательная, проведенная в каждой точке этого интервала, располагается выше графика функции. Говорят, что функция $f(x)$ на интервале (a, b) вогнута, если касательная, проведенная в каждой точке этого интервала, располагается ниже графика функции.

Теорема. Если функция $f(x)$ на интервале (a, b) выпукла и имеет в каждой точке данного интервала вторую производную, то вторая производная на всем интервале (a, b) неположительна $f''(x) \le 0$. Если функция (a, b) на интервале (a, b) вогнута и имеет в каждой точке данного интервала вторую производную, то вторая производная на всем интервале (a, b) неотрицательна. $f''(x) \le 0$.

Теорема. Если в каждой точке интервала (a, b) функция $f(x)$ имеет отрицательную вторую производную $f''(x) < 0$, то на указанном интервале функция $f(x)$ выпукла. Если в каждой точке интервала (a, b) функция $f(x)$ имеет положительную вторую производную $f''(x) > 0$, то на указанном интервале функция $f(x)$ вогнута.

Определение. Точкой перегиба функции $f(x)$ называется точка, которая отделяет интервал выпуклости функции $f(x)$ от интервала вогнутости.

Теорема. Если при переходе через точку x_0 вторая производная функции $f''(x)$ меняет знак, то эта точка является точкой перегиба функции $f(x)$.

Пример. Определим интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 5$.

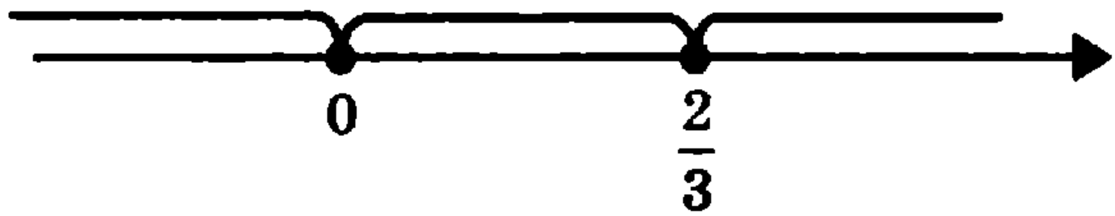
Найдем вторую производную функции

$$y' = x^3 - x^2,\ y'' = 3x^2 - 2x,$$

и определим ее нули

$$3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

Отметим нули функции на числовой оси:



Вся числовая ось оказалась разделенной на три интервала $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{2}{3})$ и $(\frac{2}{3}, +\infty)$. На каждом из полученных интервалов вторая производная функции y'' будет сохранять знак. Определим знак второй производной функции так, как это было сделано в предыдущем примере.

$y''(-1) = 5$, и значит на всем интервале $(-\infty, 0)$, в котором расположена точка $x = -1$, вторая производная функции будут положительна, а сама функция будет вогнутой. $y''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, и на интервале $(0, \frac{2}{3})$, которому принадлежит точка $x = \frac{1}{2}$, вторая производная будет отрицательной, а функция — выпуклой. $y''(1) = 1$ на интервале $(\frac{2}{3}, +\infty)$ вторая производная положительна, а функция вогнута.

Попутно были определены и точки перегиба, отделяющие интервалы вогнутости от интервалов выпуклости. Это точки $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$.

4.7. Асимптоты

Определение. Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется такая прямая $y = kx + b$, для которой разность $f(x) - kx - b$ стремится к нулю при $x \to \infty$.

Асимптоты бывают вертикальными и невертикальными.

Если в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ терпит разрыв второго рода (то есть если в этой точке равен бесконечности хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$), то вертикальная прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Для определения невертикальных асимптот вычисляются пределы

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = b$$

и $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Если существуют и конечны первые два предела, то говорят, что существует левосторонняя асимптота и значения этих пределов определяют ее параметры k и b.

Если существуют и конечны вторые два из приведенных выше пределов, то говорят что существует правосторонняя асимптота и значения этих пределов определяют ее параметры k и b.

Иногда левосторонняя и правосторонняя асимптоты совпадают, такая асимптота называется двухсторонней.

Пример. Найдем асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

В точке $x = 1$ функция неопределенна и ее односторонние пределы в этой точке равны $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$. Следовательно в этой точке функция имеет разрыв второго рода, а уравнение ее вертикальной асимптоты $x = 1$.

Найдем невертикальные асимптоты графика функции:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x'}{(x-1)'} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 .$$

Так как вычислялись пределы при $x \to \pm\infty$, то найденные параметры определяют двухстороннюю асимптоту $y = x + 1$. Схематически расположение асимптот, изображенных пунктирными линиями, и графика функции представлено на рис. 8.

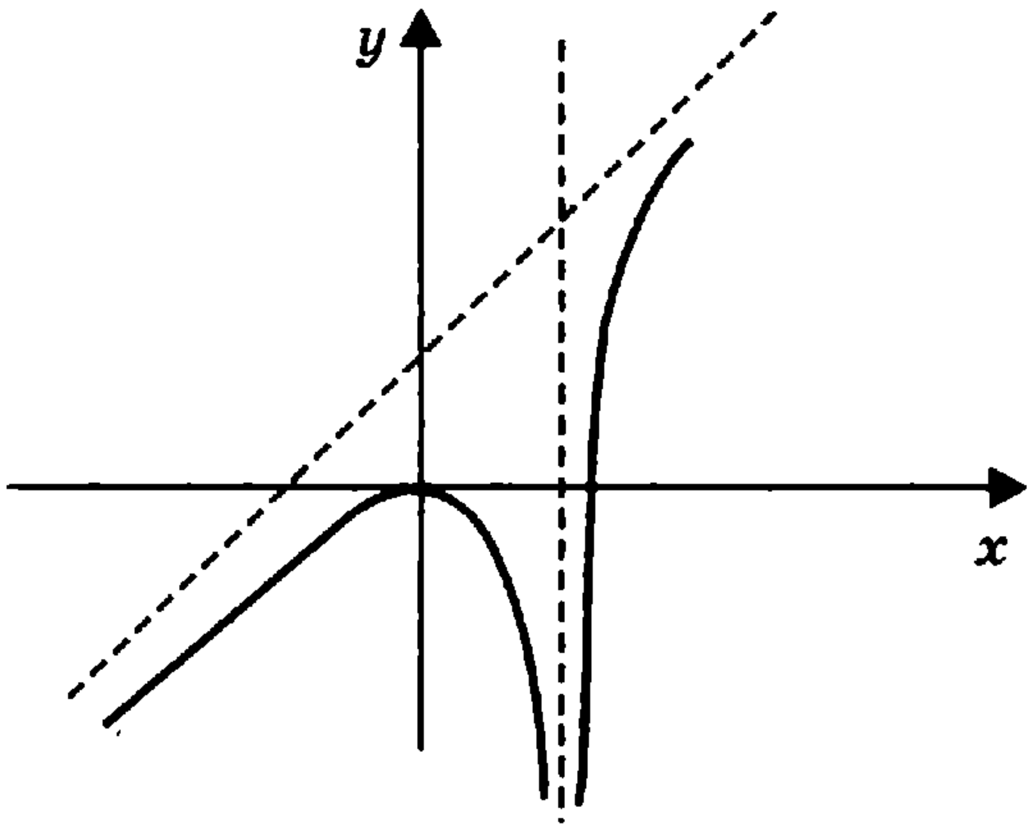


Рис. 8

4.8. Исследование функций

Исследование функций проводится по следующему плану:

1. Находится область определения функции.
2. Находятся точки пересечения графика функции с осями координат.

3. Определить, является ли функция четной или нечетной.

4. Определяются интервалы возрастания и убывания функции, точки ее экстремумов.

5. Определяются интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.

6. Находятся асимптоты графика функции.

7. Строится график функции.

Пример. Исследуем функцию $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

1. Областью определения функции будет вся числовая ось, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в ноль $x^2 - 1 = 0$, то есть за исключением точек $x = -1$ и $x = 1$.

2. Для определения точек пересечения графика функции с осью OX следует решить уравнение $\dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$, которое имеет единственное решение $x = 0$. Таким образом, график пересекает ось OX в точке $x = 0$.

Положив $x = 0$, можно найти точку пересечения с осью OY, она совпадет в данном случае с вышенайденной точкой.

3. Исследуем функцию на четность. Функция называется четной, если выполняется соотношение $y(-x) = y(x)$, и функция называется нечетной, если для нее справедливо соотношение $y(-x) = -y(x)$.

$$y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = -y(x)$$

Таким образом, данная функция является нечетной.

4. Для определения интервалов возрастания и убывания найдем производную функции:

$$y' = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

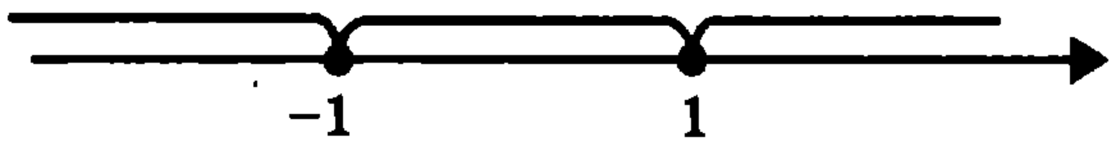
$$= \frac{x^2-1-x2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}.$$

Далее найдем нули числителя и знаменателя полученного выражения:

$-x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ числитель нулей не имеет,

$(x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$
$x_1 = -1, x_2 = 1.$

Отмечаем полученные значения на числовой оси:



Числовая ось разделилась на три интервала. Возьмем по одной точке на каждом интервале, например −2, 0 и 2, и вычислим в них значение первой производной:

$$y'(-2) = -\frac{(-2)^2+1}{((-2)^2-1)^2} = -\frac{5}{9} < 0,$$ значит производная на всем интервале $(-\infty, -1)$, которому принадлежит точка $x = -2$, будет отрицательной и на этом интервале функция будет убывать;

$y'(0) = \frac{-1}{1} = -1 < 0$, точка $x = 0$ принадлежит интервалу $(-1, 1)$, и на всем этом интервале производная тоже будет отрицательной, а функция будет убывать;

$y'(2) = -\frac{(2)^2 + 1}{((2)^2 - 1)^2} = -\frac{5}{9} < 0$, из чего следует, что и на всем интервале $(1, +\infty)$ функция будет убывающей.

На всей области определения производная функции отрицательна, следовательно, на всей области определения функция убывает, и потому экстремумов у нее нет.

5. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \left(-\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}\right)' =$$

$$= -\frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 1)^2 - (x^2 + 1)((x^2 - 1)^2)'}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= -\frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^3} =$$

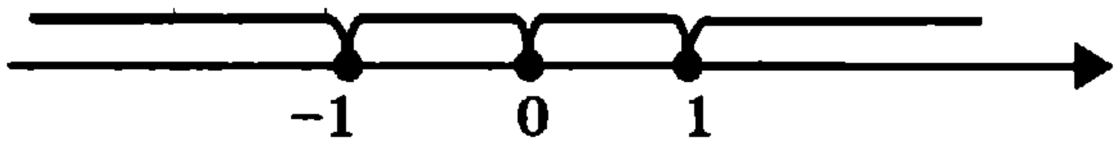
$$= -\frac{2x^3 - 2x - 4x^3 - 4x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}.$$

Найдем нули числителя и знаменателя полученной дроби:

$2x^3 + 6x = 0 \Rightarrow x(2x^2 + 6) = 0 \Rightarrow x = 0,$

$(x^2 - 1)^3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$
$x = -1, x = 1.$

Отметим нули числителя и знаменателя на числовой оси:



Чтобы определить знак второй производной на каждом из полученных интервалов, вычислим ее значение в точках −2; −0,5; 0,5 и 2, принадлежащих этим интервалам:

$$y(-2) = \frac{2(-2)^3 + 6(-2)}{((-2)^2 - 1)^3} = \frac{-28}{27} < 0\text{, следовательно,}$$

всюду на интервале $(-\infty, -1)$ вторая производная функции отрицательна, а график функции выпуклый;

$$y(-0,5) = \frac{2(-0,5)^3 + 6(-0,5)}{((-0,5)^2 - 1)^3} = \frac{-3,25}{(-0,75)^3} > 0\text{, зна-}$$

чит вторая производная на интервале (−1, 0), которому принадлежит точка −0,5, положительна, и график функции на этом интервале вогнутый;

$$y(0,5) = \frac{2(0,5)^3 + 6(0,5)}{((0,5)^2 - 1)^3} = \frac{3,25}{(-0,75)^3} < 0\text{, вторая}$$

производная на интервале (0, 1), которому принадлежит точка 0,5, отрицательна, и график функции на этом интервале выпуклый;

$$y(2) = \frac{2(2)^3 + 6(2)}{((2)^2 - 1)^3} = \frac{28}{27} > 0,$$ на интервале $(1, +\infty)$ вторая производная положительна, а график функции вогнутый.

Точкой перегиба графика функции будет точка $x = 0$, так как она отделяет интервал вогнутости $(-1, 0)$ от интервала выпуклости $(0, 1)$.

6. Найдем односторонние пределы функции в точках $x = -1$ и $x = 1$, где она не определена:

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x\to -1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty,$$ значит в точке $x = -1$ функция имеет разрыв второго рода;

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty,$$ значит в точке $x = 1$ функция тоже имеет разрыв второго рода.

Таким образом, график функции имеет две вертикальные асимптоты $x = -1$ и $x = 1$.

Для нахождения невертикальных асимптот вычислим пределы:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x^2-1} - 0\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = 0.$$

Следовательно, график функции имеет невертикальную асимптоту $y = 0$.

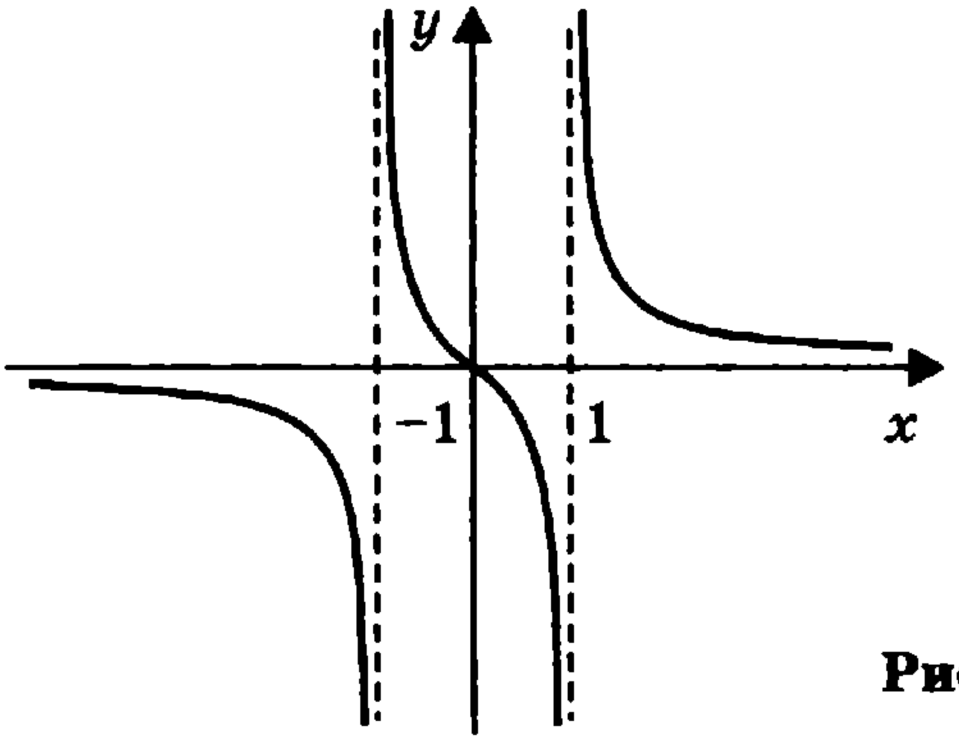


Рис. 9

На рис. 9 изображен график данной функции.

4.9. Наибольшее и наименьшее значение функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$. Если $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, то она достигает на нем своих наименьшего и наибольшего значений. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения на отрезке $[a, b]$ используется следующий алгоритм.

1. Определяются точки, принадлежащие отрезку $[a, b]$, в которых производная функция либо равна нулю, либо не существует.

2. Вычисляются значения функции в указанных выше точках и в граничных точках рассматриваемого отрезка $x = a$ и $x = b$.

3. Из вычисленных значений функции выбираются наибольшее и наименьшее, которые и будут, соответственно, наибольшим и наименьшим значениями функции на отрезке $[a, b]$.

Пример. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{x^2 + 3x + 9}{x}$ на отрезке $[1, 5]$.

Найдем производную функции:

$$y' = \frac{(x^2 + 3x + 9)'x - x' \cdot (x^2 + 3x + 9)}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 3x - x^2 - 3x - 9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

Производная обращается в ноль в точках $x = -3$ и $x = 3$, производная не существует в точке $x = 0$. Из указанных точек рассматриваемому интервалу принадлежит лишь точка $x = 3$. Вычислим значения функции в этой точке, а также в граничных точках интервала $x = 1$ и $x = 5$:

$$y(1) = \frac{1 + 3 + 9}{1} = 13,$$

$$y(3) = \frac{9 + 9 + 9}{3} = 9,$$

$$y(5) = \frac{25 + 15 + 9}{5} = \frac{49}{5}.$$

Таким образом, наибольшее значение функции равно 13 и достигается в точке $x = 1$, а наименьшее значение равно 9 и достигается в точке $x = 3$.

5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Упорядоченную совокупность вещественных чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ будем называть точкой n-мерного пространства. Когда $x_1, x_2, ..., x_n$ принимают всевозможные значения, получают множества, которое называют Евклидовым n-мерным пространством.

Расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между двумя точками такого пространства $M_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $M_2(y_1, y_2, ..., y_n)$ определяется формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Обозначим через X некоторое множество, принадлежащее n-мерному Евклидому пространству, а через Y — некоторое множество действительных чисел.

Определение. Говорят, что на множестве X задана функция нескольких переменных, если задан закон или правило, по которому каждой точке M из множества X ставится в соответствие некоторое число y из множества Y:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(M).$$

При этом множество X называется областью определения функции, а область Y — областью изменения функции.

Определение. Число A называется пределом функции нескольких переменных $y = f(M)$ при стремлении $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ к точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ $(M \to M_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$ выполняется, как только $\rho(M, M_0) < \delta$

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A.$$

Определение. Функция $y = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если она определена в этой точке и если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

5.1. Частные производные

Далее будем для простоты рассматривать функцию двух переменных $z = f(x, y) = f(M)$, учитывая, что все излагаемое ниже справедливо и для функции любого количества переменных.

Пусть функция $z = f(x, y) = f(M)$ определена на некотором множестве Q. Возьмем некоторую точку $M_0(x_0, y_0) \in Q$ и зафиксируем переменную y_0, а переменной x_0 дадим приращение Δx такое, что точка $M_1(x_0 + \Delta x, y_0) \in Q$.

Разность $\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Определение. Если существует предел отношения частного приращения функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ к приращению переменной Δx, то этот предел называют частной производной $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогичным образом можно определить частную производную функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

В соответствии с приведенными определениями отыскание частных производных функции по одной из переменных сводится к дифференцированию данной функции по этой переменной, при котором остальные переменные считаются постоянными.

Пример. $z = 5xy^3 - 3\sin x \cdot e^{3y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5y^3 - 3\cos x \cdot e^{3y}, \frac{\partial z}{\partial y} = 15xy^2 - 9\sin x \cdot e^{3y}.$$

Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ дать приращение обоим переменным таким образом, чтобы точка $M_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежала области Q, то разность

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

называется полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Линейная относительно приращений независимых переменных Δx и Δy часть полного приращения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется полным дифференциалом $df(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ в этой точке

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \text{ ,}$$

или учитывая, что $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy \text{ .}$$

Частные производные от сложных функций

Пусть функция $z = f(u, v)$ определена в области D, и каждая из переменных u и v представляет собой функции $u = u(x, y$ и $v = v(x, y)$ переменных x и y, определенные в области Q. В этом случае говорят, что на множестве Q задана сложная функция $z = f(u(x, y), v(x, y))$. Частные производные этой функции по переменным x и y вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \text{ .}$$

5.2. Дифференцирование неявных функций

Пусть имеется неявно заданная функция $F(x, y, z) = 0$. Тогда частные производные в этом случае вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

Пример. Найдем частные производные функции $e^{xyz} + \sin(x + y + z) = 0$.

Продифференцируем это равенство по x, учитывая, что переменная z зависит от x:

$$e^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \cos(x + y + z)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0.$$

Из полученного соотношения выразим $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(e^{xyz}xy + \cos(x + y + z)\right) =$$
$$= -e^{xyz}yz - \cos(x + y + z) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-e^{xyz}yz - \cos(x + y + z)}{\left(e^{xyz}xy + \cos(x + y + z)\right)}.$$

Аналогично, для того чтобы найти частную производную по y, продифференцируем соотношение $e^{xyz} + \sin(x + y + z) = 0$ по y, учитывая, что z зависит от y

$$e^{xyz}\left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \cos(x + y + z)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Тогда $\frac{\partial z}{\partial y}\left(e^{xyz}xy+\cos(x+y+z)\right)=$

$$=-e^{xyz}xz-\cos(x+y+z) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-e^{xyz}xz-\cos(x+y+z)}{\left(e^{xyz}xy+\cos(x+y+z)\right)}.$$

5.3. Градиент функции. Производная по направлению

Пусть в некоторой области трехмерного пространства Q определена функция $u=(x, y, z)$.

Определение. Градиентом функции $u=(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)\in Q$ называется вектор gradu(M_0) с координатами $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}$.

Градиент функции указывает направление наискорейшего возрастания функции.

Пример. Пусть дана функция $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найдем градиент этой функции в точке $M_0(1, 2, 3)$.

Определим частные производные функции в этой точке:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}=\frac{3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Таким образом, градиент данной функции в точке $M_0(1, 2, 3)$ равен $\text{grad}u(M_0)=\left(\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$.

Возьмем некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и проведем через нее прямую, совпадающую по направлению с вектором $\vec{a}$. Рассмотрим значение функции $u = u(x, y, z) = u(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и в точке близкой к ней $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Определение. Производной функции $u = u(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению $\vec{a}$ называется предел $\lim\limits_{M_1\to M_0}\frac{u(M_1)-u(M_0)}{\rho(M_0,M_1)}=\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$, если этот предел существует.

Если функция $u = u(M)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то в этой точке существует ее производная по любому направлению, равная

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}=\frac{\partial u\left(M_0\right)}{\partial x}\cdot e_x+\frac{\partial u\left(M_0\right)}{\partial y}\cdot e_y+\frac{\partial u\left(M_0\right)}{\partial z}\cdot e_z,$$

где вектор $\vec{e}=(e_x;e_y;e_z)$ единичной длины, совпадающий по направлению с вектором $\vec{a}$.

Пример. Найти производную по направлению $\vec{a}=(2; 3; 6)$ функции $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ в точке $M_0(5, 3, 1)$.

Вычислим частные производные функции в точке $M_0(5, 3, 1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = \frac{10}{25 + 9 + 1} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = \frac{6}{25 + 9 + 1} = \frac{6}{35},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = \frac{2}{25 + 9 + 1} = \frac{2}{35}.$$

Найдем единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\bar{a}$.

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7,$$

тогда
$$\bar{e} = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} = \left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right).$$

Окончательно будем иметь

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial a} = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{6}{35} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{35} \cdot \frac{6}{7} =$$
$$= \frac{20 + 18 + 12}{245} = \frac{50}{245} = \frac{10}{49}.$$

5.4. Частные производные высших порядков

Допустим, что функция $z = f(x, y)$ определена в области D и имеет в этой области частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые тоже являются функцией переменных и которые тоже могут иметь частные производные. Частные производные от частных производных функции называются частными производными второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Частные производные второго порядка, которые получаются дифференцированием функции по разным аргументам ($\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$), называются смешанными.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ определена в области D и имеет в этой области непрерывные вторые смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то справедливо равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

По аналогии с частными производными второго порядка можно определить частные производные более высоких порядков.

Также можно определить дифференциалы функции более высоких порядков, например, дифференциал второго порядка:

$$d^2f(x,y) = d(df(x,y)) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2.$$

5.5. Экстремумы функций нескольких переменных

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума функции $z = f(x, y)$, если существует некоторая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, для всех точек $M(x, y)$ которой выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой минимума функции $z = f(x, y)$, если существует некоторая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, для всех точек $M(x, y)$ которой выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

Необходимое условие экстремума. Если $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $z = f(x, y)$ и если в этой точке существуют частные производные функции, то они равны нулю

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Определение. Точка, в которой частные производные функции $z = f(x, y)$ первого порядка равны нулю, называется стационарной точкой функции.

Достаточные условия экстремума. Если функция $z = f(x, y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$,

то при $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, где $a_{11} = \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}$,

$a_{12} = \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}$, $a_{22} = \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}$, точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой минимума при $a_{11} > 0$ и точкой максимума при $a_{11} < 0$, при $D < 0$ точка $M_0(x_0, y_0)$ не является точкой экстремума, а при $D = 0$ установить наличие экстремума функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ невозможно и для этого необходимо проводить более детальное исследование с привлечением частных производных более высокого порядка.

Пример. Найдем экстремумы функции

$$z = x^3 - y^3 + 3xy + 5.$$

Найдем стационарные точки данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 3x,$$

тогда стационарные точки определим из системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ -3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ -y^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4 + y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y(y^3 + 1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^3 = -1 \Rightarrow$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}.$$

Таким образом функция имеет две стационарные точки $M_1(0,\ 0)$ и $M_2(1,\ -1)$, исследуем каждую из них:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3.$$

Для точки $M_1(0,\ 0)$:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x^2} = 0,\ a_{22} = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial y^2} = 0,$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x \partial y} = 3,\ D = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0,$$

следовательно в точке $M_1(0,\ 0)$ функция экстремума не имеет.

Для точки $M_1(1,\ -1)$:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x^2} = 6,\ a_{22} = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial y^2} = 6,$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x \partial y} = 3,\ D = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0,$$

следовательно, в точке $M_1(0,\ 0)$ функция имеет экстремум, и, так как $a_{11} > 0$, этот экстремум — минимум.

Таким образом $z_{\min} = z(M_2) = 4$.

5.6. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных

Если функция определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области Q, то она достигает на этой области своих наибольшего и наименьшего значений. Рассмотрим алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на конкретном примере.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z = \frac{1}{3}x^3 + 3xy + \frac{1}{3}y^3$ в замкнутой области: $x \geq -1$, $y \geq -1$, $x + y \leq 1$.

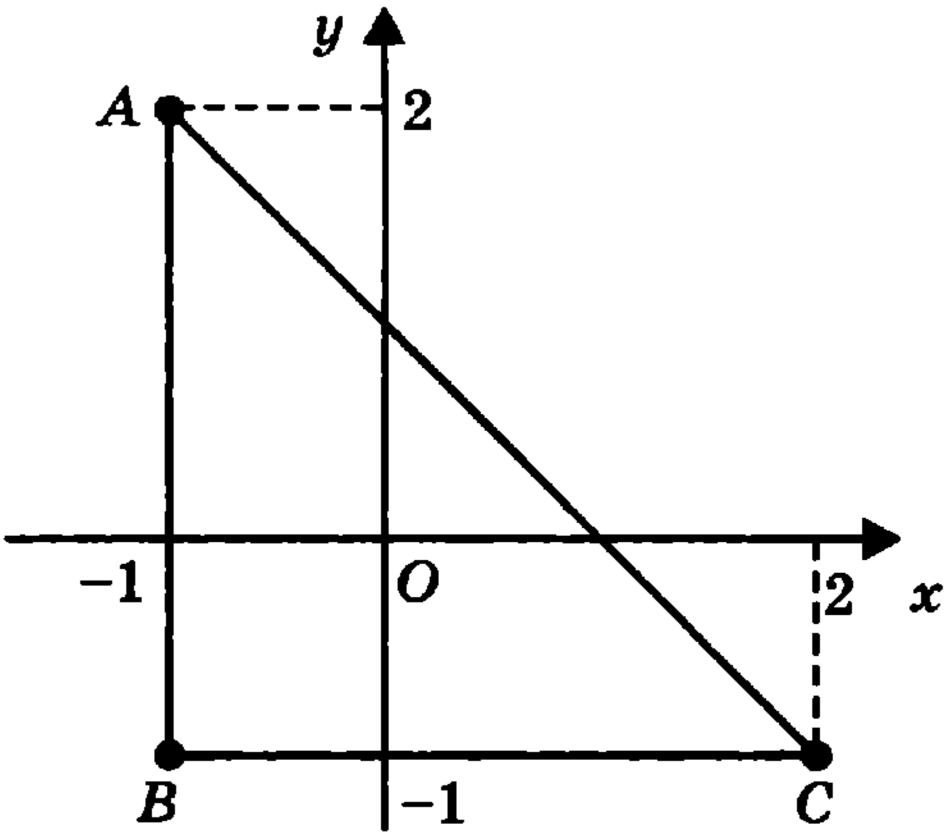


Рис. 10

Определим стационарные точки функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + 3y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + y^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y = 0 \\ 3x + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+3y=0 \\ x=-\dfrac{y^2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{y^4}{9}+3y=0 \Rightarrow \frac{y}{9}(y^3+27)=0 \Rightarrow$$

$$y_1=0 \Rightarrow y_2=-3 \Rightarrow x_1=0 \Rightarrow x_2=-3.$$

Таким образом, функция имеет две стационарные точки $O(0,\ 0)$ и $M(-3,\ -3)$. Если наибольшее или наименьшее значение функция достигает внутри области, то это возможно лишь в стационарных точках, принадлежащих данной области, т.е. в рассматриваемом случае в точке $O(0,\ 0)$. Поэтому точку $M_2(-3,\ -3)$ исключаем из рассмотрения.

Исследуем теперь границу области, которая состоит из трех участков AB, BC и AC. Рассмотрим каждый участок отдельно. Уравнение участка AB границы $x=-1$ подставим в исследуемую функцию, получим $z=\frac{1}{3}y^3-3y-\frac{1}{3}$, где $-1 \le y \le 2$. Таким образом, необходимо определить наименьшее и наибольшее значения функции одной переменной $z=\frac{1}{3}y^3-3y-\frac{1}{3}$ на отрезке $-1 \le y \le 2$.

$$\frac{dz}{dy}=y^2-3=0\ \ y_1=\sqrt{3},\ y_2=-\sqrt{3},\ \text{но}\ y_2 \notin [-1,\ 2].$$

Значит функция может принимать наибольшее и наименьшее значения в точке $y_1=\sqrt{3}$ и на границе отрезка в точках -1 и 2. Следовательно, к точке O добавим еще и точки $B(-1, -1)$, $K_1(-1, \sqrt{3})$ и $A(-1, 2)$.

Уравнение участка BC $y = -1$, а рассматриваемая функция на этом участке имеет вид

$$z = \frac{1}{3}x^3 - 3x - \frac{1}{3}\text{, где } -1 \le x \le 2.$$

$$\frac{dz}{dx} = x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, \text{но } x_2 \notin [-1, 2]$$

и функция может достигать наибольшее и наименьшее значения в точке $x_1 = \sqrt{3}$ и на границе отрезка в точках -1 и 2. Поэтому к ранее отобранным точкам добавим точки $K_2(\sqrt{3}, -1)$ и $C(2, -1)$.

Уравнение участка AC $x + y = 1$ или $y = 1 - x$. Подставив уравнение этого участка границы в рассматриваемую функцию, получим

$$z = \frac{1}{3}x^3 + 3x(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 = -2x^2 - 2x + \frac{1}{3},$$

где $-1 \le x \le 2$.

$$\frac{dz}{dx} = -4x - 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Это дает нам еще одну точку $K_3(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (точки, соответствующие граничным значениям рассматриваемого отрезка $-1 \le x \le 2$ $B(-1, -1)$ и $C(2, -1)$, были отобраны ранее).

Вычислим значения функции $z = \frac{1}{3}x^3 + 3xy + \frac{1}{3}y^3$ в точках $A, B, C, K_1, K_2, K_3, O$

$$z(A) = \frac{1}{3}(-1)^3 + 3(-1)2 + \frac{1}{3}2^3 = -\frac{1}{3} - 6 + \frac{8}{3} = -\frac{11}{3},$$

$$z(B)=\frac{1}{3}(-1)^3+3(-1)(-1)+\frac{1}{3}(-1)^3=$$

$$=-\frac{1}{3}+3-\frac{1}{3}=\frac{7}{3},$$

$$z(C)=\frac{1}{3}(2)^3+3(-1)2+\frac{1}{3}(-1)^3=\frac{8}{3}-6-\frac{1}{3}=-\frac{11}{3},$$

$$z(K_1)=\frac{1}{3}(-1)^3+3(-1)\sqrt{3}+\frac{1}{3}3\sqrt{3}=$$

$$=-\frac{1}{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}=-\frac{1}{3}-2\sqrt{3},$$

$$z(K_2)=\frac{1}{3}3\sqrt{3}+3(-1)\sqrt{3}+\frac{1}{3}(-1)^3=$$

$$=\sqrt{3}-3\sqrt{3}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}-2\sqrt{3},$$

$$z(K_3)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3=$$

$$=-\frac{1}{24}-\frac{1}{4}+\frac{9}{8}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6},$$

$$z(O)=\frac{1}{3}(0)^3+3\cdot 0\cdot 0+\frac{1}{3}0=0.$$

Выбирая из вычисленных значений наибольшее и наименьшее, получим, соответственно, наибольшее и наименьшее значения данной функции на рассматриваемом множестве. Следовательно, наименьшим значением функции будет $-\frac{1}{3}-2\sqrt{3}$, которое достигается в точках K_1 и K_2, а наибольшим — $\frac{7}{3}$, которое достигается в точке B.

6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором интервале (a, b), если для любого x из данного промежутка справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Любая непрерывная функция на некотором промежутке имеет бесконечное множество первообразных, отличающихся друг от друга лишь постоянными слагаемыми. То есть, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной функции, то $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C — постоянная.

Совокупность всех первообразных одной функции можно представить в виде $F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-либо первообразная этой функции, а C — постоянная.

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции.

Операция нахождения первообразных функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Неопределенный интеграл функции $f(x)$ обозначается следующим образом:

$$\int f(x)dx.$$

Сама функция $f(x)$ при этом называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

Таким образом

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

6.1. Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная — подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Неопределенный интеграл от производной или от дифференциала функции равен самой функции:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \int df(x)dx = f(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

4. Интеграл от конечной алгебраической суммы функций равен такой же сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. Вид интеграла не изменится. Если перейти от переменной x к переменной u, которая является дифференцируемой функцией x.

То есть если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = u(x)$ — дифференцируемая функция.

6.2. Таблица интегралов от элементарных функций

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq 1$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$

4. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = \mathrm{tg} x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -\mathrm{ctg} x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} = \arcsin x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{a^{2} + x^{2}} = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg} x + C$

6.3. Основные методы вычисления интегралов

Метод непосредственного интегрирования

Метод непосредственного интегрирования заключается в том, что, применяя тождественные преобразования подынтегрального выражения, исходный интеграл, используя свойство линейности

$$\int(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))dx=\alpha\cdot\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx,$$

сводится к нескольким более простым, которые могут быть вычислены непосредственно по таблице интегралов.

Пример. $\int\frac{4\cos^2 x-2\sin^2 x+1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx.$

Применяя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получим

$$\int\frac{4\cos^2 x-2\sin^2 x+1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{4\cos^2 x-2\sin^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{5\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx.$$

Разделим каждое слагаемое числителя в подынтегральном выражении на знаменатель:

$$\int \frac{5\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \left(\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} 5\int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -5\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x + C.$$

Метод интегрирования по частям

При использовании метода интегрирования по частям предполагается, что подынтегральное выражение может быть представлено в виде произведения некоторой функции u на дифференциал другой функции dv: $\int udv$.

Тогда, используя формулу интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

исходный интеграл заменяется другим $\int vdu$, который часто бывает более простым для вычисления.

Пример. $\int x(3\sin x - 5\cos x)dx$

Выберем в качестве $u = x$, тогда

$$dv = (3\sin x - 5\cos x)dx,\ du = dx,$$

$$v = \int (3\sin x - 5\cos x)dx = 3\int \sin xdx - 5\int \cos xdx =$$

$$= -3\cos x - 5\sin x,$$

и по приведенной выше формуле получим

$$\int x(3\sin x - 5\cos x)dx = x(-3\cos x - 5\sin x) - \int(-3\cos x - 5\sin x)dx = x(-3\cos x - 5\sin x) + 3\int\cos x dx + 5\int\sin x dx = -x(3\cos x + 5\sin x) + 3\sin x - 5\cos x + C.$$

Метод замены переменной

Суть данного метода заключается в том, что вместо исходной переменной интегрирования, например x, вводится новая переменная, например t, связанная со старой переменной соотношением $t = \omega(x)$ ($\omega(x)$ — дифференцируемая функция переменной x).

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(\omega(x))\omega'(x)$.

Тогда исходный интеграл $\int f(x)dx$ представим в виде

$$\int f(x)dx = \int g(\omega(x))\omega'(x)dx.$$

Переходя к новой переменной $t = \omega(x)$ и учитывая, что $dt = \omega'(x)dx$, а функция $g(t)$ имеет первообразную равную $G(t)$, получим

$$\int f(x)dx = \int g(\omega(x))\omega'(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + c.$$

Возвращаясь к первоначальной переменной интегрирования и подставляя вместо t функцию $\omega(x)$, окончательно получим

$$\int f(x)dx = \int g(\omega(x))\omega'(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + c = G(\omega(x)) + c.$$

Пример. $\int \frac{2\cos 2x + 3x^2}{(\sin 2x + x^3)^{1/2}}\,dx$

Обозначим через новую переменную интегрирования t выражение, стоящее в знаменателе подынтегральной функции $t = \sin 2x + x^3$, следовательно, $dt = (2\cos 2x + 3x^2)dx$ и исходный интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{2\cos 2x + 3x^2}{(\sin 2x + x^3)^{1/2}}\,dx = \int \frac{dt}{t^{1/2}}.$$

Вычислим полученный интеграл по переменной t и вернемся к старой переменной x, учитывая, что $t = \sin 2x + x^3$:

$$\int \frac{dt}{t^{1/2}} = \frac{t^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{\sin 2x + x^3} + C.$$

7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем данный отрезок произвольным образом точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ такими, что

$$a = x_o < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, где $i = 0, 1, 2, ..., n-1$.

На каждом из полученных отрезков произвольным образом выберем точку $\tau_i \in [x_i, x_{i+1}]$, вычислим значение функции в этих точках $f(\tau_i)$ и построим интегральную сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Обозначим через λ длину наибольшего из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$: $\lambda = \max\limits_i |\Delta x_i|$.

Если существует конечный предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)\Delta x_i$ при $\lambda \to 0$ (когда осуществляется переход к более мелкому разбиению отрезка $[a, b]$, при котором длина наибольшего из полученных в результате разбиения отрезков стремится к нулю), то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)\Delta x_i.$$

При этом a называется нижним пределом, а b — верхним пределом интегрирования.

Если существует указанный предел, то есть определенный интеграл, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

7.1. Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

2. Определенный интеграл от конечной алгебраической суммы функций равен такой же сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Если верхний предел интегрирования равен нижнему пределу, то определенный интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она будет интегрируемой и на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \le f(x) \le M$ на этом отрезке, то справедливо неравенство

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка с, принадлежащая отрезку $[a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

7.2. Формула Ньютона–Лейбница

Для вычисления определенного интегралов используется формула Ньютона–Лейбница, которая связывает определенный интеграл с неопределенным:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$.

Рассмотрим определенный интеграл, у которого верхний предел интегрирования есть переменная величина $\int_a^x f(t)dt$. Такой интеграл можно рассматривать как функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$.

Можно доказать, что это непрерывная дифференцируемая функция, причем $\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$.

7.3. Методы вычисления определенного интеграла

Метод непосредственного интегрирования может быть использован и для вычисления определенных интегралов. Суть этого метода заключается в том, что, применяя тождественные преобразования подынтегрального выражения, исходный интеграл, используя свойство линейности

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx =$$

$$= \alpha F(x)\Big|_a^b + \beta G(x)\Big|_a^b = \alpha F(a) - \alpha F(b) + \beta G(b) - \beta G(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, $G(x)$ — первообразная функции $g(x)$, сводится к сумме более простых интегралов, которые могут быть вычислены непосредственно при помощи таблицы интегралов.

Пример.

$$\int_1^9 \frac{x\sqrt{x} - 3x + 5}{\sqrt{x}} = \int_1^9 (x - 3\sqrt{x} + 5x^{-0,5})dx =$$

$$= \int_1^9 x dx - 3\int_1^9 \sqrt{x} dx + 5\int_1^9 x^{-0,5} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^9 - 3\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^9 + 5\frac{\sqrt{x}}{0,5}\Bigg|_1^9 = \frac{81}{2} - \frac{1}{2} - 2\cdot 27 + 2 +$$

$$+ 10\cdot 3 - 10 = 40 - 54 + 2 + 30 - 10 = 8.$$

Метод интегрирования по частям. При вычислении данным методом определенных интегралов формула интегрирования принимает вид

$$\int_a^b u dv = uv\Bigg|_a^b - \int_a^b v du = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du. \quad (2)$$

Пример. $\int_0^1 (x-7)e^x dx$

Примем за $u = x - 7$, а $dv = e^x dx$, тогда получим $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$ и, используя (2)

$$\int_0^1 (x-7)e^x dx = (x-7)e^x\Bigg|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$$

$$= (1-7)e - (0-7)e^0 - e^x\Bigg|_0^1 = -6e + 7 - e + e^{\,0} =$$

$$= -7e + 8.$$

Метод замены переменной. Допустим, что необходимо вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, в котором подынтегральная функция представима в виде $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$, где $\varphi(x)$ — функция дифференцируемая на интервале $[a, b]$ и на концах указанного интеграла принимает значения $\varphi(a) = t_0$,$\varphi(b) = t_1$, а функция $g(t)$ имеет первообразную $G(t)$.

Введем новую переменную интегрирования t, связанную со старой переменной x соотношением $t = \varphi(x)$, тогда получим

Пример. $\int\limits_0^1 (x^2 + 3x)^{3/2}(2x + 3)dx$

Введем новую переменную интегрирования $t = \varphi(x) = x^2 + 3x$, тогда $dt = \varphi'(x)dx = (2x + 3)dx$.

При $x = 0$ $t = \varphi(0) = 0$, а при $x = 1$ $t = \varphi(1) = 1^2 + 3 = 4$.

В результате получим

$$\int\limits_0^1 (x^2 + 5x)^{3/2} \ (2x + 5)dx = \int\limits_0^4 t^{3/2}dt = \left.\frac{t^{5/2}}{5/2}\right|_0^4 =$$

$$= \frac{2}{5}4^{5/2} = \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{64}{5}.$$

7.4. Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, на котором данная функция принимает положительные значения, численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком $f(x)$, осью OX и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

Применение определенных интегралов для вычисления площадей плоских фигур

Пусть необходимо вычислить площадь фигуры $ABCD$, ограниченной вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми линиями, которые являются графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (рис. 1).

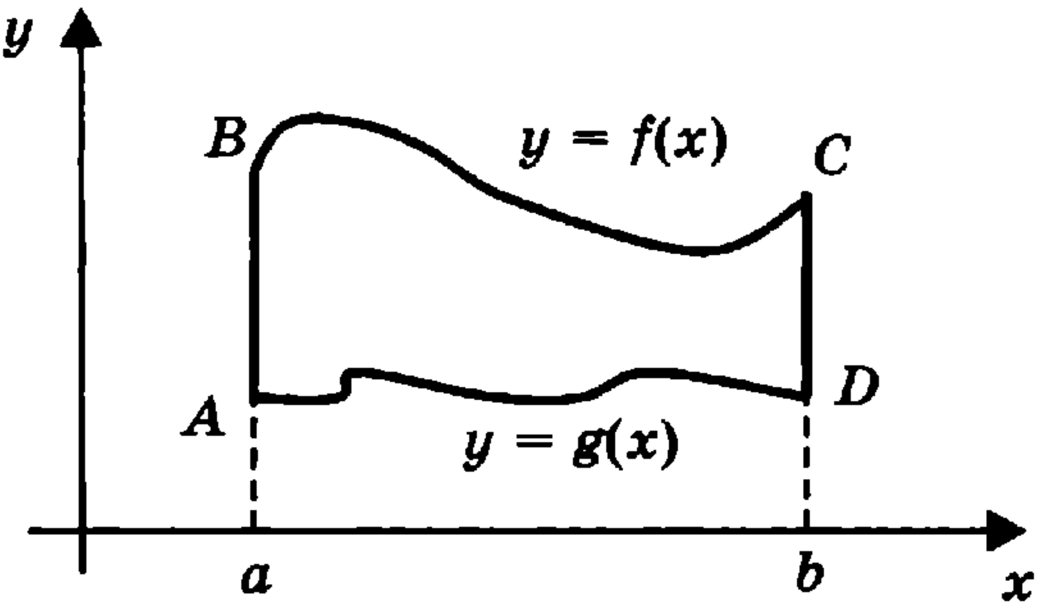


Рис. 11

Используя определенный интеграл, площадь указанной фигуры можно выразить следующей формулой:

$$S_{ABCD} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Эта формула будет справедлива и в том случае, когда вертикальные границы области отрезка AB

или CD вырождаются в точки (то есть совпадают точки A, B и точки C, D).

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$ и $y = -2x + 2$.

Границами данной области являются парабола $y = 2x^2$, расположенная ветвями вверх, с вершиной в начале координат, и прямая линия $y = -2x + 4$. Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения указанных линий, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = -2x + 4 \end{cases}.$$

Исключив неизвестное y, получим следующее уравнение относительно неизвестного x:

$$y = 2x^2 = -2x + 4.$$

Разделим обе части полученного уравнения на 2:

$$x^2 = -x + 2.$$

Перенесем все члены уравнения вправо:

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Решим это уравнение, используя известную формулу для вычисления корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где a, b, c — коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

В нашем случае $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$. Тогда

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

Взяв знак минус, получим значение для первого корня уравнения $x_1 = -2$, взяв плюс, получим второй корень $x_1 = 1$.

На рис. 12 представлена рассматриваемая фигура.

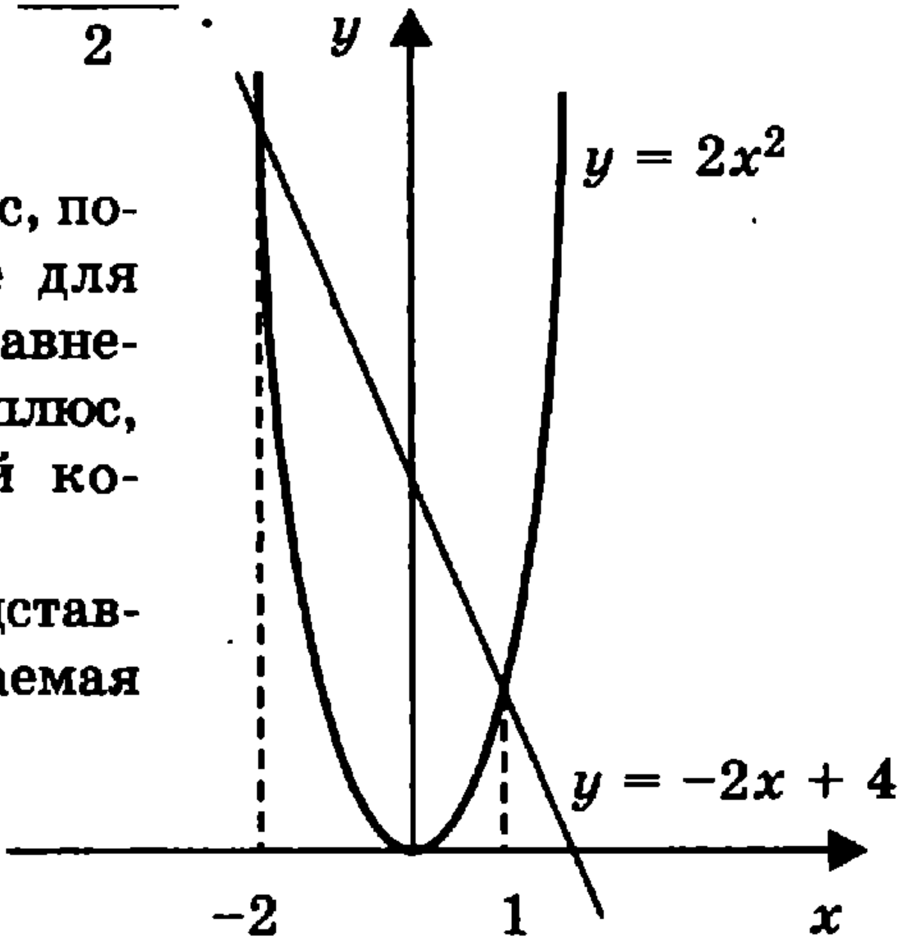


Рис. 12

В данном случае $f(x) = -2x + 4$, $g(x) = 2x^2$, $a = -2$, $b = 1$.

$$S = \int_{-2}^{1} (-2x + 4 - 2x^2)dx = -2\int_{-2}^{1} xdx + 4\int_{-2}^{1} dx - 2\int_{-2}^{1} x^2dx =$$

$$= -2\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1} + 4x\Bigg|_{-2}^{1} - 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1} = -2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right) +$$

$$+ 4(1 - (-2)) - 2\left(\frac{1}{3} - \frac{(-8)}{3}\right) = -1 + 4 + 4 + 8 - 2\frac{9}{3} =$$

$$= 15 - 6 = 9.$$

8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение.

Например, уравнение $y''' + xy' = y^3$ третьего порядка, уравнение $y(y'')^2 + y'\cos x = 1$ — дифференциальное уравнение второго порядка, уравнение $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ — дифференциальное уравнение четвертого порядка.

Функция $y(x)$, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество, называется решением дифференциального уравнения.

Решение дифференциального уравнения, заданное в неявном виде, называется интегралом дифференциального уравнения.

График функции, которая является решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой.

8.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее первую производную $F(x, y, y') = 0$.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = y(x, C)$, содержащая произвольную постоянную C и обращающая в тождество дифференциальное уравнение.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, которое получается из общего решения, если придать произвольной постоянной C некоторое числовое значение.

Геометрически общее решение дифференциального уравнения первого порядка можно представить как семейство кривых в некоторой области D, каждая из которых соответствует определенному значению постоянной C, причем через каждую точку области D проходит только одна кривая семейства.

Иногда дифференциальное уравнение представляется в виде разрешенном относительно производной неизвестной функции $y' = f(x, y)$.

Для того чтобы из семейства решений $y = y(x, C)$ выделить единственное, к дифференциальному уравнению добавляют начальное условие —

требование, чтобы интегральная кривая проходила через заданную точку (x_0, y_0) области D:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Задача определения решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

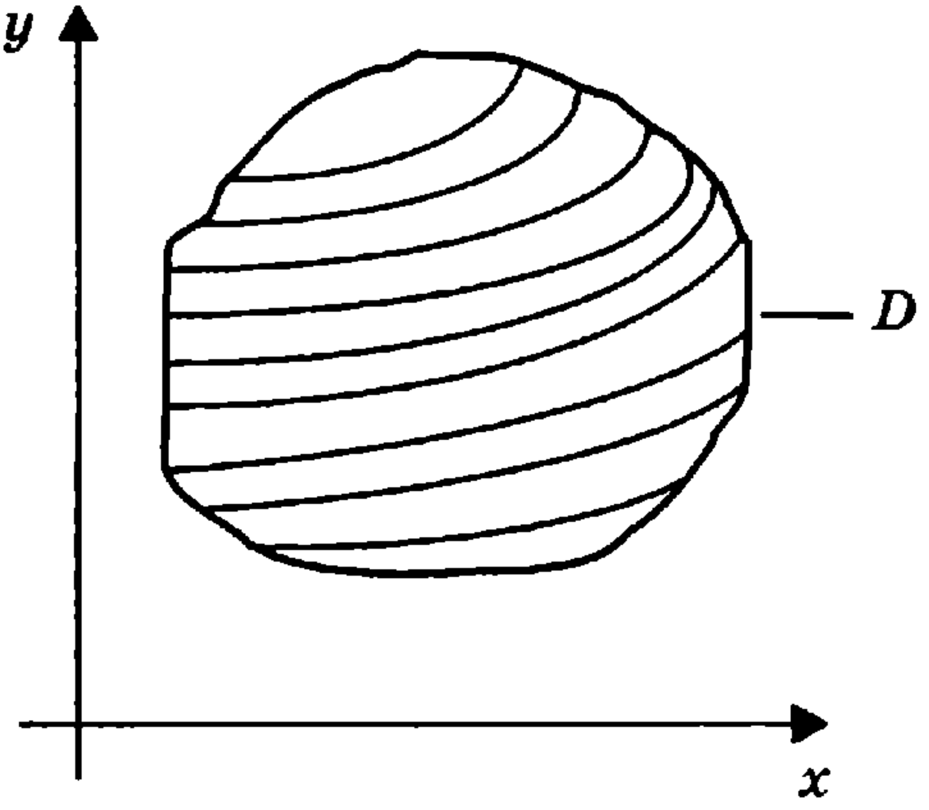


Рис. 13

Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка

Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе с частной производной $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ во всех точках некоторой области D, то существует, и притом единственное, решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, проходящее через данную точку (x_0, y_0), принадлежащую области D, то есть удовлетворяющее условию $y_0 = \varphi(x_0)$.

8.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называются дифференциальные уравнения первого порядка вида

$$p(x)h(y)y' = f(x)g(y).$$

Заменим в уравнении производную неизвестной функции y отношением дифференциалов неизвестной функции dy и независимой переменной dx, получим

$$p(x)h(y)\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Теперь для разделения переменных разнесем дифференциалы переменных dx и dy по разные стороны знака равенства, для чего умножим обе части уравнения на dx:

$$p(x)h(y)dy = f(x)g(y)dx.$$

Завершая процесс разделения переменных, перенесем функцию $p(x)$ влево, а $g(y)$ — вправо, разделив обе части уравнения на $p(x) \cdot g(y)$:

$$\frac{h(y)}{g(y)}dy = \frac{f(x)}{p(x)}dx.$$

Интегрируя это равенство, получим общее решение исходного уравнения:

$$\int \frac{h(y)}{g(y)} dy = \int \frac{f(x)}{p(x)} dx + c.$$

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' \frac{\ln y}{\ln^2 x} = \frac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Заменив производную в уравнении отношением дифференциалов $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} \frac{\ln y}{\ln^2 x} = \frac{y}{x},$$

умножим обе части уравнения на dx

$$dy \frac{\ln y}{\ln^2 x} = \frac{y}{x} dx.$$

Далее разделим обе части полученного соотношения на $\frac{y}{\ln^2 x}$

$$\frac{\ln y}{y} dy = \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

и проинтегрируем его $\int \frac{\ln y}{y} dy = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx + c$.

Для вычисления интеграла $\int \frac{\ln y}{y} dy$ введем новую переменную интегрирования $z = \ln y$, тогда

$$dz = \frac{dy}{y} \quad \text{и} \quad \int \frac{\ln y}{y} dy = \int z dz = \frac{z^2}{2} = \frac{\ln^2 y}{2}.$$

Во втором интеграле $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ сделаем замену переменной интегрирования, положив $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. В этом случае получим

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3}.$$

Окончательно общее решение можно представить в виде

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \frac{\ln^3 x}{3} + c.$$

Потребуем выполнения условия $y(1) = 1$, для чего в полученное общее решение исходного дифференциального уравнения подставим $x = 1$ и $y = 1$:

$$\frac{\ln^2 1}{2} = \frac{\ln^3 1}{3} + c.$$

Учитывая, что логарифм единицы равен нулю, для произвольной постоянной получим $C = 0$. Подставляя найденное значение C в общее решение уравнения, определим окончательный вид частного решения, удовлетворяющее поставленным начальным условиям $y(1) = 1$:

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \frac{\ln^3 x}{3}.$$

Если существует такое y_0, что $g(y_0) = 0$, то постоянная функция $y = y_0$ так же будет решением уравнения, в чем легко убедиться подстановкой этой функции в уравнение:

$$p(x)h(y)\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Левая часть данного уравнения будет равна нулю в силу равенства нулю производной $\frac{dy_0}{dx} = 0$ как величины постоянной, а правая часть уравнения равна нулю в силу того, что $g(y_0) = 0$. Это решение нельзя получить из общего решения ни при каких значениях произвольной постоянной. Такие решения дифференциальных уравнений называются особыми.

8.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если оно может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородные дифференциальные уравнения можно рассматривать как частный случай дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, к которым они могут быть сведены. Для этого вводят новую неизвестную функцию $z = \frac{y}{x}$.

Тогда $y = z \cdot x$, а $y' = z'x + z$. Подставляя приведенные соотношения в (5), получим

$$z'x + z = f(z) \text{ или } z'x = f(z) - z.$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Заменим в нем z' на $\frac{dz}{dx}$: $\frac{dz}{dx}x = f(z) - z$, а затем умножим обе его части на dx

$$dz \cdot x = (f(z) - z) \cdot dx.$$

Далее, разделим обе части уравнения на $x \cdot (f(z) - z)$, получим

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя приведенное выше соотношение $\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + c$ и возвращаясь к старой неизвестной функции y, делая замену $z = \frac{y}{x}$, получим общее решение исходного однородного дифференциального уравнения первого порядка.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{5/2} + \frac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

После введения новой неизвестной функции $z = \frac{y}{x}$ ($y = z \cdot x$, а $y' = z'x + z$) дифференциальное уравнение примет вид

$$z'x + z = (1+z)^{5/2} + z \Rightarrow z'x = (1+z)^{5/2} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}x = (1+z)^{5/2}.$$

Умножая полеченное уравнение на dx

$$dz \cdot x = (1+z)^{5/2}dx,$$

а затем деля на $x(1+z)^{5/2}$, получим

$$\frac{dz}{(1+z)^{5/2}} = \frac{dx}{x}.$$

Для завершения построения общего решения проинтегрируем приведенное выше соотношение

$$\int \frac{dz}{(1+z)^{5/2}} = \int \frac{dx}{x} + c.$$

Интеграл, стоящий в правой части, является табличным $\int \frac{dx}{x} = \ln x$.

В интеграле $\int \frac{dz}{(1+z)^{5/2}}$ сделаем замену переменной интегрирования

$$s = 1+z \Rightarrow ds = dz \Rightarrow \int \frac{dz}{(1+z)^{5/2}} = \int \frac{ds}{s^{5/2}} =$$

$$= \int s^{-5/2}ds = \frac{s^{-3/2}}{-3/2} = -\frac{2}{3}\frac{1}{s^{3/2}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{(1+z)^{3/2}}.$$

Тогда $-\frac{2}{3}\frac{1}{(1+z)^{3/2}} = \ln x + c$, а общее решение уравнение выразится в виде

$$-\frac{2}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^{3/2}} = \ln x + c.$$

Подставляя в общее решение $x = 1$, $y = 0$ (начальное условие), получим

$$-\frac{2}{3}\frac{1}{(1+0)^{3/2}} = \ln 1 + c \Rightarrow -\frac{2}{3} = c.$$

Тогда при данном значении c общее решение примет вид, соответствующий определяемому частному решению

$$-\frac{2}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^{3/2}} = \ln x - \frac{2}{3}.$$

8.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейными уравнениями первого порядка называются уравнения вида

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x)$, $q(x)$ — заданные функции.

Будем искать решение линейного уравнения в виде произведения двух неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$y = u(x)v(x).$$

Подставим указанный вид решения в уравнение

$$u'v + uv' + p(x)uv = p(x).$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые в левой части и вынесем за скобки их общий множитель u:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = p(x).$$

Выберем функцию $v(x)$ таким образом, чтобы обратилось в ноль выражение в скобках:

$$v' + p(x)v = 0.$$

Данное соотношение можно рассматривать как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $v(x)$, которое представим в виде

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \text{ или } \frac{dv}{dx} = -p(x)v.$$

Умножим полученное уравнение на dx, а затем разделим на v:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx$$

и проинтегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln v = -\int p(x)dx \Rightarrow$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Обращаем внимание на то, что в данном случае отсутствует произвольная постоянная c, которая появляется при вычислении неопределенного интеграла и которая всегда присутствовала в ранее рассмотренных случаях. Это объясняется тем, что для построения решения подойдет любая функция v, обращающая в ноль выражение в скобках $v' + p(x)v = 0$, в том числе и та, которая соответствует $c = 0$.

Учитывая вышеизложенное, для определения функции u получим следующее дифференциальное уравнение, которое тоже будет уравнением с разделяющимися переменными $u'v = p(x)$ или с учетом определенного ранее вида функции $v = e^{-\int p(x)dx}$:

$$u'e^{-\int p(x)dx} = p(x).$$

Заменим производную u' отношением дифференциалов:

$$\frac{du}{dx} e^{-\int p(x)dx} = p(x).$$

Умножим обе части полученного уравнения на $e^{\int p(x)dx}$:

$$\frac{du}{dx} = p(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Интегрированием найдем выражение для функции u:

$$u = \int p(x)e^{\int p(x)dx} dx + c.$$

Тогда окончательное общее решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y = u(x)v(x) = \left(\int p(x)e^{\int p(x)dx} dx + c\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + 3x^2y = (x + x^2)e^{-x^3}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Реализуя метод решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка, будем искать решение в виде $y = u \cdot v$. Тогда $y = u'v + uv'$ и исходное уравнение примет вид

$$u'v + uv' + 3x^2uv = (x + x^2)e^{-x^3}.$$

Далее, следуя соответствующему алгоритму, получим:

$$u'v + u(v' + 3x^2v) = (x + x^2)e^{-x^3} \quad (8) \Rightarrow$$

$$v' + 3x^2v = 0 \Rightarrow v' + 3x^2v = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} + 3x^2v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -3x^2v \Rightarrow$$

$$dv = -3x^2vdx \Rightarrow \frac{dv}{v} = -3x^2dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int 3x^2dx.$$

Интеграл $\int \frac{dv}{v} = \ln v$, а интеграл

$$\int 3x^2dx = 3\int x^2dx = 3\,\frac{x^3}{3} = x^3,$$

тогда $\ln v = -x^3 \Rightarrow v = e^{-x^3}$.

Подставляя полученное значение v в (8) и учитывая, что при этом $v' + 3x^2v = 0$, будем иметь $u'e^{-x^3} = (x + x^2)e^{-x^3}$ или $u' = (x + x^2)$.

Следовательно

$$u = \int (x + x^2)dx = \int xdx + \int x^2dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c.$$

Перемножая полученные выражения для функций u и v, найдем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = u \cdot v = e^{-x^3}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c\right).$$

Для определения постоянной c вычислим значение полученного выражения для общего решения уравнения при $x = 1$ и потребуем, чтобы оно равнялось 0, как того требует поставленное начальное условие:

$$y(1) = e^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + c\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + c = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; c = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{3+2}{6} = -\frac{5}{6}.$$

Подставив найденное значение c в общее решение исходного дифференциального уравнения, получим частное решение этого же уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию:

$$y = e^{-x^3}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{6}\right).$$

8.5. Дифференциальные уравнения высших порядков

Часто дифференциальные уравнения высших порядков представляют в виде разрешенном относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, содержащая n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и обращающая в тождество дифференциальное уравнение.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, которое получается из общего решения, если придать произвольным постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ некоторое числовое значение.

Для того чтобы из семейства решений $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ выделить единственное, к дифференциальному уравнению добавляют начальные условия

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases},$$

где $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — определенные заданные числа.

Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка

Если функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ определена и непрерывна вместе со своими частными производной $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y'}$, ... $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y^{(n-1)}}$ во всех точках некоторой n-мерной области, содержащей точку $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, то существует, притом единственное, решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Простейшее дифференциальное уравнение n-го порядка

Простейшее дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид $y^{(n)} = f(x)$.

Общее решение данного дифференциального уравнения получается в результате n-кратного интегрирования левой и правой частей уравнения

$$y(x) = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + C_{n-1}x + C_n.$$

8.6. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

В дальнейшем, рассматривая дифференциальные уравнения высших порядков, ограничимся уравнениями второго порядка в силу того, что чаще всего на практике встречаются именно дифференциальные уравнения второго порядка.

1. **Уравнение, не содержащее явно неизвестной функции $y(x)$:**

$$F(x, y', y'') = 0 .$$

Для понижения порядка данного уравнения введем новую неизвестную функцию $z(x) = y'(x)$. В результате исходное дифференциальное уравнение примет вид $F(x, z, z') = 0$, решая которое найдем $z = \varphi(x, C_1)$.

Учитывая, что $y'(x) = z(x) = \varphi(x, C_1)$, получим

$$y(x) = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2 .$$

Пример. Найдем общее решение дифференциального уравнения $x \cdot y'' = y'$.

Сделав замену неизвестной функции $z(x) = y'(x)$, получим уравнение $x \cdot z' = z$, которое является уравнением с разделяющимися переменными:

$$x \cdot \frac{dz}{dx} = z \Rightarrow x \cdot dz = z \cdot dx \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C_1 \Rightarrow \ln z = \ln x + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\ln z = \ln C_1 x \Rightarrow z = C_1 x \Rightarrow y' = C_1 x \Rightarrow$$

$$y = \int C_1 x dx + C_2 = C_1 \int x dx + C_2 = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 .$$

2. **Уравнение, не содержащее независимой переменной x:**

$$F(y, y', y'') = 0 .$$

Введем новую неизвестную функцию $p(y(x)) = y'$ и примем y за независимую переменную. Тогда $y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$ и исходное дифференциальное уравнение будет иметь вид $F(y, p, p' \cdot p) = 0$, которое является уравнением первого порядка относительно неизвестной функции $p(y)$. Определив общее решение данного уравнения $p = p(y, C_1)$, получим дифференциальное уравнение для определения y: $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, метод решения которого был рассмотрен выше:

$$dy = p(y, C_1)dx \;\Rightarrow\; \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx .$$

Проинтегрировав последнее соотношение, получим общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = \int dx + C_2 \text{ или } \int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2 .$$

Пример. $yy'' - y'^2 = 0$. Введем новую неизвестную функцию $p(y(x)) = y'$ и, учитывая, что $y'' = p' \cdot p$, преобразуем дифференциальное уравнение к виду $yp'p - p^2 = 0$. Далее имеем $p(yp' - p) = 0$, из чего следует два уравнения $p = 0$ или $yp' - p = 0$.

Первое уравнение при переходе к исходной неизвестной функции принимает вид $y' = 0$, которое имеет решение $y = C$. Это особое решение исходного уравнения.

Второе уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$y\frac{dp}{dy} = p \Rightarrow ydp = pdy \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y} + \ln C_1 \Rightarrow \ln p = \ln y + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\ln p = \ln C_1 y \Rightarrow p = C_1 y.$$

Далее, возвращаясь к исходной неизвестной функции, получим дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = C_1 y$, которое тоже является уравнением с разделяющимися переменными:

$$dy = C_1 y dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = C_1\int dx + C_2 \Rightarrow$$

$$\ln y = C_1 x + C \Rightarrow y = e^{C_1 x + C_2} = e^{C_1 x}e^{C_2}.$$

Вводя новую произвольную постоянную $C_3 = e^{C_2}$, получим окончательный вид общего решения исходного дифференциального уравнения:

$$y = C_3 e^{C_1 x}.$$

8.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами называются дифференциальные уравнения вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q — заданные постоянные.

Для нахождения общего решения данного дифференциального уравнения строится соответствующее ему характеристическое уравнение, имеющее вид

$$k^2 + pk + q = 0\ ,$$

и определяются его корни.

При этом возможны следующие ситуации, зависящие от знака дискриминанта D характеристического уравнения.

1. $D = p^2 - 4q > 0$

В этом случае характеристическое уравнение имеет два разных корня

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}\ ,$$

а общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}\ ,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2. $D = p^2 - 4q = 0$

В этом случае характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня

$$k_{1,2} = \frac{-p}{2} = k,$$

а общее решение уравнения

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx},$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. $D = p^2 - 4q < 0$

В этом случае характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$$k_1 = \frac{-p - i\sqrt{-D}}{2} = \alpha - i\beta \text{ и } k_2 = \frac{-p + i\sqrt{-D}}{2} = \alpha + i\beta,$$

$$\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2},$$

а общее решение исходного однородного линейного дифференциального уравнения представляется в виде $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 27y' + 140y = 0$.

Строим соответствующее данному дифференциальному уравнению характеристическое уравнение, учитывая, что в рассматриваемом случае $p = 27$, а $q = 140$:

$$k^2 + 27k + 140 = 0.$$

Дискриминант характеристического уравнения равен

$$D = 27^2 - 4 \cdot 140 = 729 - 560 = 169 > 0.$$

Следовательно, уравнение имеет два разных корня:

$$k_1 = \frac{-27-\sqrt{169}}{2} = \frac{-27-13}{2} = -\frac{40}{2} = -20$$

и $$k_2 = \frac{-27+\sqrt{169}}{2} = \frac{-27+13}{2} = -\frac{14}{2} = -7\ ,$$

а общее решение исходного однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{-20x} + C_2e^{-7x}.$$

8.8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейными неоднородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами будем называть дифференциальные уравнения вида

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где p и q — заданные постоянные, а $f(x)$ — заданная непрерывная функция.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения y имеет следующий вид:

$$y = y_0 + y_ч,$$

где y_0 — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$, а $y_ч$ — частное решение исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Методы построения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения рассматривались выше. Построение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения в общем случае представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому рассмотрим метод построения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью $f(x)$, то есть когда правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены, соответственно степени n и m, α, β — постоянные (числа).

В этом случае частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения строится методом неопределенных коэффициентов. Суть этого метода заключается в том, что частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения ищется в виде

$$y_ч = x^{\varepsilon}(M_s(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + N_s(x)e^{\alpha x}\sin\beta x),$$

где $M_s(x)$, $N_s(x)$ — многочлены степени s с неопределенными коэффициентами, s — равно наибольшему из двух чисел n и m, ε — число корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ равных $\alpha + i\beta$.

Данный вид частного решения подставляется в исходное линейное неоднородное дифференциальное уравнение, после чего неопределенные коэффициенты многочленов $M_s(x)$, $N_s(x)$ подбираются таким образом, чтобы полученное равенство тождественно выполнялось при всех значениях x. Для этого приравниваются коэффициенты, стоящие при одинаковых функциях в левой и правой частях указанного выше равенства. В результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочленов $M_s(x)$, $N_s(x)$. Решая эту систему и определяя коэффициенты многочленов, подставляют найденные для них значения в исходный вид частного решения, завершая тем самым построение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 10y' + 26y = 52x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

Найдем корни характеристического уравнения соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' - 10y' + 26y = 0$:

$$k^2 - 10k + 26 = 0 \Rightarrow$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 26 = 100 - 104 = -4 \Rightarrow$$

$$k_1 = \frac{10 - \sqrt{-4}}{2} = \frac{10 - 2i}{2} = 5 - i,$$

$$k_2 = \frac{10+\sqrt{-4}}{2} = \frac{10+2i}{2} = 5+i\,.$$

В этом случае общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y_0 = C_1 e^{5x}\cos x + C_2 e^{5x}\sin x.$$

Правая часть исходного уравнения $5x$ соответствует $\alpha = 0$, $\beta = 0$, и первой степени многочлена $P_n(x)$. Корни характеристического уравнения не совпадают с числом $\alpha + i\beta = 0$, и частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде $y_ч = Ax + B$.

Подставив данный вид частного решения в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$y'_ч = A,\;\; y''_ч = 0 \Rightarrow 0 - 10A + 26(Ax + B) = 52x \Rightarrow$$

$$26Ax - 10A + 26B = 52x\,.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой частях полученного соотношения, построим систему уравнений для определения коэффициентов A и B:

– при x: $26A = 52$;

– при x^0: $-10A + 26B = 0 \Rightarrow \begin{cases} 26A = 52 \\ -10A + 26B = 0 \end{cases}$

Из первого уравнения находим $A = 2$, тогда из второго уравнения будем иметь

$$-10\cdot 2 + 26B = 0 \Rightarrow B = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}\,.$$

Следовательно $y_ч = 2x + \frac{10}{13}$, а общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = y_0 + y_ч = C_1 e^{5x}\cos x + C_2 e^{5x}\sin x + 2x + \frac{10}{13}.$$

Потребуем, чтобы полученное решение удовлетворяло поставленным начальным условиям:

$$y(0) = C_1 e^{5\cdot 0}\cos 0 + C_2 e^{5\cdot 0}\sin 0 + 2\cdot 0 + \frac{10}{13} =$$

$$= C_1 + \frac{10}{13} = -1$$

$$y' = 5C_1 e^{5x}\cos x - C_1 e^{5x}\sin x +$$

$$+ 5C_2 e^{5x}\sin x + C_2 e^{5x}\cos x + 2$$

$$y'(0) = 5C_1 e^{5\cdot 0}\cos 0 - C_1 e^{5\cdot 0}\sin 0 + 5C_2 e^{5\cdot 0}\sin 0 +$$

$$+ C_2 e^{5\cdot 0}\cos 0 + 2 = 5C_1 + C_2 + 2 = 0$$

Таким образом, для определения коэффициентов C_1 и C_2 имеем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{23}{13} \\ 5C_1 + C_2 = -2 \end{cases}.$$

Тогда

$$C_2 = -2 - 5C_1 = -2 - 5\left(-\frac{23}{13}\right) = \frac{-26 + 115}{13} = \frac{89}{13},$$

а искомое частное решение будет иметь вид:

$$y = -\frac{23}{13}e^{5x}\cos x + \frac{89}{13}e^{5x}\sin x + 2x + \frac{10}{13}.$$

9. РЯДЫ

9.1. Числовые ряды

Пусть имеется некоторая бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, .., a_n ...$.

Числовым рядом называется бесконечная сумма членов числовой последовательности

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где a_n — общий член числового ряда.

Пример.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + .. = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Сумма первых n членов числового ряда называется его частичной суммой:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n.$$

Меняя n, получим различные значения для частичной суммы S_n. Таким образом получим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$.

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся и этот предел принимается за сумму числового ряда.

Если указанный выше предел не существует или бесконечен, то ряд называется расходящимся, он суммы не имеет.

9.2. Свойства сходящихся рядов

1. Если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и λ некоторое число, то будет сходиться и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ и справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Если сходятся числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и справедливо равенство $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Для любого N ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ сходятся и расходятся одновременно, то есть на сходимость ряда не влияет любое конечное число первых членов ряда.

Необходимый признак сходимости числового ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего члена равен нулю $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Выполнение условия необходимого признака еще не означает, что ряд сходится. Однако невыполнение условия необходимого признака означает, что этот ряд расходится.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+5}$. Предел его общего члена $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{5}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$, следовательно, данный ряд расходится.

9.3. Знакоположительные (знакопостоянные) числовые ряды

Ряд называется знакопостоянным, если все его члены положительны или все члены отрицательны.

Будем рассматривать знакоположительные ряды, у которых все члены положительны. Ряды у которых все члены отрицательны, легко сводятся к знакоположительным, если вынести за скобки знак минус, общий для всех членов ряда. Тогда в скобках останется знакоположительный ряд.

Рассмотрим достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Признак Даламбера

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Тогда если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ ряд расходится, при $q = 1$ признак не решает вопроса о сходимости ряда.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

Его общий член $a_n = \frac{5^n}{n!}$, а $a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} n!}{(n+1)!\,5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1,$$

значит данный ряд сходится.

Признак Коши

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Тогда если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, то при $r < 1$ ряд сходится, при $r > 1$ ряд расходится, при $r = 1$ признак не решает вопроса о сходимости ряда.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n}$.

Общий член ряда $a_n=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n}$, тогда

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n}}=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2}$$

и $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3+\frac{1}{n}}\right)^{2}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1}{9}<1,$$

следовательно, данный ряд сходится.

Интегральный признак сходимости

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Тогда если существует непрерывная, монотонно убывающая функция $f(x)$, такая, что $a_n=f(n)$, то данный ряд и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Пример. Рассмотрим знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, где s — некоторый положительный параметр. Такой ряд называют гармоническим. Очевидно в этом случае $f(x) = \frac{1}{x^s}$, так как $f(n) = \frac{1}{n^s}$. Тогда, исследуя несобственный интеграл, соответствующий данному ряду, получим

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x^s} = \lim_{A\to\infty} \left. \frac{x^{1=s}}{1-s} \right|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{A^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right).$$

Значение полученного выше предела зависит от параметра s. Если $s < 1$, то предел равен ∞ и интеграл вместе с рассматриваемым рядом расходится, если $s > 1$, то предел равен $\frac{1}{1-s}$ и интеграл вместе с рядом сходится.

Следует отметить, что приведенные выше формулы имеют смысл лишь при $s \neq 1$, и случай $s = 1$ необходимо исследовать отдельно.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, которому соответствует несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\ln x\Big|_1^A=\lim_{A\to\infty}\ln A=\infty$$

и значит данный ряд расходится.

Окончательно получаем следующий результат: гармонический ряд сходится при $s>1$ и расходится при $s\le 1$.

Признак сравнения

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. Тогда, если существует конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, то оба ряда одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3n+5}}.$$

Рассмотрим поведение общего члена ряда для достаточно больших n $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+3n+5}}$. Если n достаточно велико, то величина n^3 намного превосходит $3n$ и 5 и значит, последними двумя слагаемыми, стоящими в знаменателе под знаком квадратного корня, можно пренебречь:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+3n+5}} \approx \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Рассмотрим другой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, с которым будем сравнивать исследуемый ряд. Это гармонический ряд, у которого параметр $s = \frac{3}{2}$ и, следовательно, этот ряд сходится. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+3n+5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3}{n^3+3n+5}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}} = 1.$$

Рассмотренный выше предел конечный и не равен нулю, значит, исходный ряд будет сходящимся.

9.4. Знакопеременные ряды

Будем теперь рассматривать знакопеременные ряды, члены которых могут быть как положительными, так и отрицательными. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ такой ряд.

Если сходится ряд, составленный из абсолютных значений членов знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то говорят, что исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно.

Если ряд, составленный из абсолютных значений членов знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, расходится, сам знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то говорят, что этот знакопеременный ряд сходится условно.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

9.5. Знакочередующиеся ряды

Числовой ряд называется знакочередующимся, если любые два рядом стоящих члена его имеют противоположные знаки.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \ldots + (-1)^{n-1} a_n \ldots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \ a_n > 0.$$

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница)

Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \ldots$ и предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд будет сходиться и его сумма S не превзойдет a_1.

Пример. Рассмотрим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+3)}{n^2+5n}.$$

Докажем, что члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, то есть что $a_n \ge a_{n+1}$. В данном случае $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+5n}$, а $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)+3}{(n+1)^2+5(n+1)} = \dfrac{n+4}{n^2+7n+6}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n+3}{n^2+5n} - \frac{n+4}{n^2+7n+6} =$$

$$= \frac{(n+3)(n^2+7n+6)-(n+4)(n^2+5n)}{(n^2+5n)(n^2+7n+6)} =$$

$$= \frac{n^2+7n+18}{(n^2+5n)(n^2+7n+6)} > 0,$$

следовательно, $a_n - a_{n+1} > 0$ и $a_n > a_{n+1}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} = 0 .$$

Таким образом, оба условия признака Лейбница выполнены и исследуемый ряд сходится.

9.6. Функциональные ряды

Ряд, члены которого являются функциями, называется функциональным рядом:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, ..., $u_n(x)$, ... — функции переменной x.

Придавая переменной x различные числовые значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Областью сходимости функционального ряда называется множество значений x, для которых функциональный ряд сходится.

Если x принадлежит области сходимости, то функциональный ряд будет иметь сумму $S(x)$, которая будет зависеть от x:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = S(x) .$$

Сумма ряда функционального представляет собой функцию, определенную на области сходимости.

9.7. Степенные ряды

Частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды, которые в общем случае имеют вид

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \ldots$$

$$\ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

где $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ — числа, именуемые коэффициентами ряда, x_0 — некоторое фиксированное значение переменной x.

Чаще имеют дело со степенными рядами в более простой форме:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n,$$

к которой можно прийти, если ввести новую переменную, обозначив через нее выражение $x - x_0$. Далее будем иметь в виду такую форму степенного ряда.

Теорема Абеля

Если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он будет сходиться и притом абсолютно для всех x, для которых $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_0$, то он будет расходиться и для всех x, для которых $|x| > |x_0|$.

Интервалом сходимости степенного ряда является интервал, симметричный относительно точки $x = 0$, вида $(-R, R)$. Величина R называется радиусом сходимости степенного ряда и определяется формулой

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}}.$$

Внутри интервала сходимости $(-R, R)$ степенной ряд сходится, а на концах интервала в точках $x = -R$ и $x = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Поэтому при определении области сходимости степенного ряда сходимость его на концах интервала сходимости исследуется отдельно.

Пример. Определим область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{5^n(n^2+1)}$.

Найдем радиус сходимости данного ряда:

$$c_n = \frac{n}{5^n(n^2+1)},$$

$$c_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1}((n+1)^2+1)} = \frac{n+1}{5^{n+1}(n^2+2n+2)},$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n5^{n+1}(n^2+2n+2)}{(n+1)5^n(n^2+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n5(n^2+2n+2)}{(n+1)(n^2+1)} = 5\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 5.$$

Следовательно, интервал сходимости данного ряда (−5, 5). Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. Подставим в степенной ряд вместо x значение, соответствующее левой граничной точки интервала сходимости $x = -5$, получим знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-5)^n}{5^n(n^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n 5^n}{5^n(n^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n^2+1)} .$$

Для исследования сходимости этого ряда используем признак сходимости Лейбница:

$$a_n = \frac{n}{(n^2+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{((n+1)^2+1)} = \frac{n+1}{n^2+2n+2},$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{(n^2+1)} - \frac{n+1}{n^2+2n+2} =$$

$$= \frac{n(n^2+2n+2)-(n+1)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} =$$

$$= \frac{n^2+n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} .$$

Знаменатель полученной дроби положительный, так как представляет собой произведение положительных величин $(n^2 + 1)$ и $(n^2 + 2n + 2)$. Числитель дроби $n^2 + n - 1$ положителен при $n > 0$, и значит, данная дробь будет положительной при $n > 0$. Следовательно первое условие признака Лейбница $a_n > a_{n+1}$ выполняется при $n > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Это означает, что и второе условие признака Лейбница тоже выполняется. Данный ряд сходится, и точку $x = -5$ следует включить в область сходимости исследуемого степенного ряда.

Аналогичным образом исследуем сходимость степенного ряда в граничной точке $x = 5$, подставив в степенной ряд вместо x значение 5:

$$\sum_{n=0} \frac{n5^n}{5^n(n^2+1)} = \sum_{n=0} \frac{n}{(n^2+1)}.$$

Применяя признак сравнения, рассмотрим поведение общего члена полученного числового ряда $a_n = \frac{n}{(n^2+1)}$ для больших n. Пренебрегая в числителе единицей по сравнении с n^2, получим $a_n = \frac{n}{(n^2+1)} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Поэтому будем сравнивать данный числовой ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который соответствует значению параметра $s = 1$, что означает его расходимость.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Рассмотренный предел конечен, и значит, что исследуемый числовой ряд будет расходиться вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Таким образом, точку $x = 5$ следует включить в область сходимости. Окончательно областью сходимости исходного степенного ряда будет множество $[-5, 5)$.

9.8. Ряды Тейлора

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и имеет в данной окрестности производные любого порядка. Тогда рядом Тейлора функции $y = f(x)$ будет ряд

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x - x_0)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Сумма первых n ряда $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = S_n$ называется частичной суммой ряда Тейлора. Величина $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ называется остатком ряда Тейлора.

Необходимым и достаточным условием разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора, т.е. представления функции в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

является стремление при $n \to \infty$ к нулю остатка $R_n(x)$.

Разложение в ряд Тейлора некоторых функций

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$,

область сходимости $(-\infty, +\infty)$.

2. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, область сходимости $(-\infty, +\infty)$.

3. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, область сходимости $(-\infty, +\infty)$.

4. $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + \ldots =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, область сходимости $(-1, 1]$.

10. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей изучает закономерности однородных массовых случайных явлений.

Испытанием называется всякое действие, которое предпринимается с определенной целью. Всякий результат испытания называется событием.

Событие называется достоверным, если оно обязательно произойдет при наличии данной совокупности условий. Например, закипание воды при температуре 100 градусов и при нормальном атмосферном давлении, падение вниз брошенного вверх тела, возгорание бумаги при повышении ее температуры до температуры возгорания.

Событие называется невозможным, если оно обязательно не произойдет при наличии данной совокупности условий. Например, закипание воды при температуре ноль градусов, извлечение белого шара из урны, содержащей только черные шары, уменьшение длины металлической проволоки при ее нагревании.

Событие называется случайным, если оно может произойти или не произойти при наличии данной совокупности условий. Например, выпадение герба при бросании монеты, извлечение наугад туза из колоды карт, поражение цели при выстреле из орудия.

Два события называются несовместимыми, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. Например, попадание в мишень и непопадание в мишень. Если наступление одного события не исключает возможность наступления другого, то такие события называются совместимыми. Например, выпадение четного числа и числа кратного трем, при бросании игральной кости (при выпадении «шестерки» эти события наступают одновременно). Несовместимость более двух событий означает их попарную несовместимость.

Два несовместимых события, одно из которых обязательно должно наступить, называются противоположными. Например, выпадение четного или нечетного числа при бросании игральной кости. Событие, противоположное событию A, обозначается $\bar{A}$ (читается «не A»).

Совокупность событий образует полную группу событий, если все события этой совокупности несовместимы и единственно возможны. Другими словами, обязательно произойдет одно из событий данной совокупности. Например, выпадение единицы, двойки, тройки, четверки, пятерки или шестерки при бросании игральной кости.

В теории вероятности события принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C и т.д.

Допустим, проводится испытание, результатом которого может быть один из некоторой совокупности исходов. Если результатом данного испытания может быть только один исход из данной совокупности, тогда все исходы данной совокупности являются единственно возможными. Если ни один из исходов данной совокупности исходов не является более возможным, чем другие, то все исходы этой совокупности называются равновозможными. Если результатом рассматриваемого испытания может быть наступление только одного исхода из данной совокупности, то эти исходы называются несовместимыми.

Классическое определение вероятности. Вероятностью $P(A)$ наступления события A называется отношение числа благоприятствующих наступлению данного события исходов m к числу всех несовместимых, единственно возможных и равновозможных исходов испытания n.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример. Пусть испытание заключается в бросании игральной кости (кубика, имеющего форму куба, все грани которого пронумерованы числами от 1 до 6).

Определим вероятность события A, которое заключается в выпадении нечётного числа. Совокупность несовместимых, единственно возможных и равновозможных исходов состоит из исходов, заключающихся в выпадении единицы, двойки, тройки, четверки, пятерки и шестерки (всего шесть исходов, то есть $n = 6$). Число исходов, благоприятствующих наступлению рассматриваемого события $m = 3$ (выпадение единицы, тройки или пятерки). Следовательно вероятность рассматриваемого события

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Вероятность достоверного события равна единице. Вероятность невозможного события равна нулю. Вероятность случайного события A больше нуля и меньше единицы: $0 < P(A) < 1$.

Суммой двух событий A и B (обозначается $A + B$) называется событие, состоящее в наступлении события A или события B или событий A и B одновременно.

Например, если событие A — выпадение четного числа при бросании игральной кости, а событие B — выпадение числа, кратного трем, то событие $A + B$ будет заключаться в выпадении или четного числа, или числа, кратного трем, или числа четного и кратного трем одновременно, то есть в выпадении 2, 3, 4, 6.

Суммой любого конечного числа событий является событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из суммируемых событий.

Произведением двух событий A и B (обозначается $A \cdot B$) называется событие C, состоящее в совместном наступлении событий A и B.

Например, если событие A — выпадение четного числа при бросании игральной кости, а событие B — выпадение числа, кратного трем, то событие $A \cdot B$ будет заключаться в выпадении четных чисел, кратных трем, то есть в выпадении числа 6.

Произведением конечного числа событий называется событие, состоящее в том, что наступят все перемножаемые события.

События A и B называются зависимыми, если наступление одного из них изменяет вероятность другого.

События A и B называются независимыми, если наступление одного из них не изменяет вероятность другого.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются попарно независимыми, если любые два из них являются независимыми.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если вероятность каждого из них не меняется при наступлении других событий одного или нескольких в любой комбинации и в любом числе.

Будем называть число M появлений события A в серии из N испытаний частотой события A, а отношение $\frac{M}{N}$ будем называть относительной частотой события A.

В сериях с небольшим количеством испытаний N относительная частота события подвергается сильным колебаниям. При переходе к сериям с большим количеством испытаний N колебания относительной частоты сглаживаются и относительная частота постепенно принимает некоторое устойчивое значение.

Статистической вероятностью называют постоянную величину, около которой группируются наблюдаемые значения относительной частоты.

10.1. Теорема сложения вероятностей

Теорема о сумме двух несовместимых событий. Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Эту теорему легко обобщить на случай суммирования любого конечного числа независимых событий:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Теорема о сумме двух совместимых событий. Вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Следствия из теоремы сложения вероятностей:

1. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1 .$$

2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

10.2. Теорема умножения вероятностей

Вероятность события A, найденная в предположении, что событие B наступило, называется условной вероятностью события A относительно события B. Обозначается $P_B(A)$.

Теорема о вероятности произведения двух событий. Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого события относительно события, взятого первым:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Если события A и B являются независимыми, то $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$.

В этом случае формулировка приведенной выше теоремы будет более простой.

Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема о вероятности произведения конечного числа событий. Вероятность произведения конечного числа событий равна произведению их условных вероятностей относительно произведения предшествующих каждому из них событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n)$$

Если перемножаемые события являются независимыми в совокупности, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

10.3. Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие A может произойти лишь совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий. События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют гипотезами. Известны вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, а также условные вероятности $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), \ldots, P_{H_n}(A)$. Тогда вероятность события A будет равна

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots$$

$$\ldots + P(H_n)P_{H_n}(A).$$

Формула Байеса

Допустим, что событие A наступило. Тогда вероятность $P_A(H_i)$ того, что событие A наступило совместно с событием H_i, равна

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A)}.$$

10.4. Повторные независимые испытания

Ряд испытаний будем называть независимыми по отношению к событию A, если вероятность наступления A в каждом испытании не зависит от результатов прочих испытаний.

Например, выпадение «шестерки» при бросании игральной кости. Вероятность выпадение «шестерки» при каждом бросании не зависит от того, сколько раз она выпадала в других испытаниях.

Пусть проводится n испытаний, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вероятностью p. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в серии из n испытаний событие A произойдет ровно m раз ($0 \le m \le n$), определяется формулой

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{(n-m)},$$

где $q = 1 - p$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.

Наиболее вероятное число появлений события A в серии из n испытаний m_0 удовлетворяет соотношению

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

При больших значениях n вероятность $P_n(m)$ приближенно определяется по формуле (локальная теорема Лапласа)

$$P_n(m) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi nqp}},$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании достаточно мала, а n велико ($pn < 10$), то

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$ (формула Пуассона).

Вероятность того, что в серии из n испытаний число m наступлений события A окажется заключенным в границах от m_1 до m_2 для достаточно больших n, находится по формуле (интегральная теорема Лапласа)

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \frac{1}{2}(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)),$$

где $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Свойства функции $\Phi(x)$:

1. Функция $\Phi(x)$ нечетная, то есть

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

2. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастающая, если $x_2 > x_1$, то $\Phi(x_2) > \Phi(x_1)$.

3. Для достаточно больших x ($x > 5$) можно считать $\Phi(x) \approx 1$.

10.5. Случайные величины

Случайной величиной называется переменная, которая может принимать в зависимости от исходов испытания те или иные случайные значения.

Случайная величина называется дискретной, если она принимает отдельные изолированные значения.

Случайная величина называется непрерывной, если она принимает все значения из некоторого интервала.

Случайные величины обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита X, Y, ...

Дискретные случайные величины

Дискретная случайная величина (ДСВ) считается заданной, если определены все ее значения и соответствующие им вероятности. Функция $F(x)$, которая связывает значения ДСВ с соответствующими им вероятностями, называется законом распределения случайной величины. Часто эту функцию задают в виде таблицы, в которой представлены все значения ДСВ x_i и соответствующие им вероятности p_i

x_i	x_1	x_2	....	x_n
p_i	p_1	p_2	....	p_n

При этом $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$, если ДСВ принимает бесконечное счетное число значений, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Примеры.

1. Биноминально распределенной называется ДСВ, которая определяет количество наступлений события A в серии n повторных независимых испытаний, если в каждом из них событие A может наступить с вероятностью p.

Эта ДСВ принимает целочисленные значения m от 0 до n. Функция, связывающая значения этой случайной величины с соответствующими им вероятностями

$$F(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

где $q = p - 1$.

2. ДСВ, которая принимает целые неотрицательные значения 0, 1, 2, 3, ... с вероятностями $F(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ называется случайной величиной, распределенной по закону Пуассона.

10.6. Непрерывные случайные величины

Непрерывная случайная величина (НСВ) X задается своей функцией распределения $F(x)$, которая выражает для каждого x вероятность того, что случайная величина примет какое-нибудь значение, меньшее x

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения НСВ:

1. Функция распределения НСВ $F(x)$ является непрерывной функцией (в отличие от функции распределения ДСВ, которая является разрывной).

2. Функция распределения НСВ $F(x)$ принимает значения на отрезке [0; 1].

3. Функция распределения НСВ $F(x)$ является неубывающей, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$.

4. При $x \to +\infty$ $F(x) \to 1$, а при $x \to -\infty$ $F(x) \to 0$.

Плотностью вероятности $\varphi(x)$ НСВ X называется производная от ее функции распределения $F(x)$

$$\varphi(x) = F'(x).$$

Функция $\varphi(x)$ неотрицательна и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

Вероятность того, что случайная величина X примет какое-либо значение внутри отрезка $[x_1; x_2]$, определяется формулой

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx.$$

Примеры. НСВ называется распределенной по показательному закону, если она принимает только неотрицательные значения и ее плотность вероятности имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0 \end{cases},$$

где $\lambda > 0$.

Функция распределения данной НСВ

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \ge 0 \end{cases}.$$

10.7. Операции над случайными величинами

1. Произведением случайной величины X, принимающей значения x_i с вероятностями p_i ($P(X = x_i) = p_i$), на постоянную величину C называется случайная величина CX, которая с вероятностями p_i принимает значения, равные Cx_i.

2. Суммой случайной величины X, принимающей значения x_i с вероятностями p_i ($i = 1, 2, ..., n$), и случайной величины Y, принимающей значе-

ния y_j с вероятностями q_j ($j = 1, 2, , m$), называется случайная величина $X + Y$, которая принимает все значения вида $x_i + y_j$ с вероятностью $p_i\, q_j$.

3. Используя вышеопределенные операции, можно ввести операцию вычитания случайных величин $X - Y = X + (-1) \cdot Y$ как сумму двух случайных величин, одна из которых умножена на -1.

4. Случайные величины X и Y называются независимыми, если законы распределения каждой из них не меняются, если становится известным, что другая величина приняла какое-нибудь одно свое значение.

Произведением двух случайных независимых величин X, принимающей значения x_i с вероятностями p_i ($i = 1, 2, ..., n$), и Y, принимающей значения y_j с вероятностями q_j ($j = 1, 2, ..., m$), называется случайная величина $X\,Y$, принимающая все значения вида $x_i\, y_j$ с вероятностью $p_i\, q_j$.

10.8. Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание

Математическим ожиданием (средним значением) $M(X)$ ДСВ X называется сумма произведений всевозможных ее значений на соответствующие им вероятности.

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

Математическим ожиданием НСВ X называется интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$ — плотность вероятности НСВ X.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной $M(C) = C$.

2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно их сумме математических ожиданий:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

4. Если все значения случайной величины уменьшить на одно и то же число C, то ее математическое ожидание уменьшится на то же число C:

$$M(X - C) = M(X) - C.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X).$$

Математическое ожидание некоторых случайных величин

Математическое ожидание биноминально распределенной случайной величины равно np.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равно параметру λ.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону равно $\dfrac{1}{\lambda}$.

Дисперсия

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Дисперсия характеризует степень рассеяния значения случайной величины относительно ее математического ожидания (среднего значения).

Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Для вычисления дисперсии дискретной случайной величины может быть использована следующая формула:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^2 p_k.$$

Если ДСВ принимает счетное число значения, то величина n в верхнем пределе суммы заменяется ∞.

Для вычисления дисперсии НСВ используется формула

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \varphi(x) dx,$$

где $\varphi(x)$ — плотность вероятности НСВ.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю $D(C) = 0$.

2. Дисперсия суммы независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

3. Дисперсия разности независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(C \cdot X) = C^2 D(X).$$

Дисперсия некоторых случайных величин

Дисперсия биноминально распределенной случайной величины равна npq.

Дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна параметру λ.

Дисперсия случайной величины, распределенной по показательному закону, равна $\frac{1}{\lambda^2}$.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется арифметический корень из ее дисперсии $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Моменты случайных величин

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание ее k-й степени.

Для ДСВ начальный момент k-го порядка определяется формулой $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k p_i$, а для НСВ вычисляется по формуле $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)dx$.

Центральным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени ее отклонения от ее математического ожидания.

Для ДСВ центральный момент k-го порядка определяется формулой

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^k p_i,$$

а для НСВ вычисляется по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^k \varphi(x)dx,$$

где a — математическое ожидание НСВ.

Абсолютным начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины $|X|^k$, которая для ДСВ вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^k \, p_i,$$

а для НСВ — по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \varphi(x)dx.$$

10.9. Непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность вероятности имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a — математическое ожидание, а σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Вероятность того, что случайная величина X, распределенная по нормальному закону, примет какое-нибудь значение из интервала (α, β), определяется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right).$$

Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a не превосходит по модулю величины $\Delta > 0$, определяется по формуле

$$P\left(\left|X - a\right| \le \Delta\right) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

10.10. Закон больших чисел

Закон больших чисел — это совокупность предложений, в которых утверждается, что с вероятностью сколь угодно близкой к единице отклонение средней арифметической достаточно большого числа случайных величин от постоянной величины, равной средней арифметической их математических ожиданий, не превзойдет заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$.

Неравенство Маркова. Если случайная величина X не принимает отрицательных значений и δ — произвольная положительная величина, то вероятность того, что значения случайной величины X не превзойдут величины δ, не превысит $1 - \frac{a}{\delta}$, где a есть математическое ожидание X

$$P(X \le \delta) \le 1 - \frac{a}{\delta}.$$

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания превзойдет по модулю положительное число δ, не больше дроби, числитель которой есть дисперсия случайной величины, а знаменатель — квадрат δ:

$$P\left(\left|X-a\right|>\delta\right)\le\frac{D(X)}{\delta^2}.$$

Теорема Чебышева. Если дисперсия попарно независимых случайных величин не превосходит заданного положительного числа C, то вероятность того, что абсолютное отклонение средней арифметической таких величин от средней арифметической их математических ожиданий меньше некоторого числа ε, с возрастанием количества случайных величин становится сколь угодно близкой к единице

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|\le\varepsilon\right)>1-\delta,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайные величины, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — их математические ожидания, $\varepsilon>0$, $\delta>0$.

Следствие из теоремы Чебышева. Если независимые случайные величины имеют одинаковые равные a математические ожидания, дисперсии их ограничены одной и той же постоянной C, а их число достаточно велико, то, как бы ни было мало данное число $\varepsilon>0$, вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от a не превысит по абсолютной величине ε, сколь угодно близка к единице

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{n}-a\right|\le\varepsilon\right)>1-\delta.$$

Теорема Пуассона. Если вероятность p_i наступления события A в i-м испытании ($i = 1, 2, ..., n$) не меняется, когда становится известным исход предыдущих испытаний, а число испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что относительная частота события A будет сколь угодно мало отличаться от средней арифметической вероятностей p_i, сколь угодно мала.

Теорема Бернулли. Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что относительная частота события A будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности, сколь угодно близка к единице.

Теорема Ляпунова. Если имеется n независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ с математическими ожиданиями $a_1, a_2, ..., a_n$ и с дисперсиями $D(X_1), D(X_2), ..., D(X_n)$, причем отклонения всех случайных величин от их математических ожиданий не превышают по абсолютной величине одного и того же числа $\varepsilon > 0$:

$$|X_i - a_i| \le \varepsilon,$$

а все дисперсии ограничены одним и тем же числом C:

$$D(X_i) \le C,$$

то при достаточно большом n сумма случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ будет подчинена закону распределения, как угодно близкому к закону нормального распределения.

11. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

При проведении многих исследований приходится иметь дело с изучением свойств различных совокупностей однотипных объектов. Экономически не выгодно (а иногда и невозможно) исследовать всю совокупность, если по результатам изучения ее части можно получить с достаточной достоверностью необходимую информацию о всей совокупности. Такой метод исследования называется выборочным.

Вся совокупность объектов, подлежащих изучению, называется генеральной совокупностью. Та часть объектов генеральной совокупности, которая попала в число исследуемых, называется выборочной совокупностью, или выборкой.

Выборки сформированные посредством случайного выбора объектов называются собственно-случайными. Выборка называется повторной, если отобранные объекты после исследования возвращаются в генеральную совокупность (и значит, могут повторно быть выбраны для исследования). Выборка называется бесповторной, если отобранные объекты после исследования не возвращаются в генеральную совокупность.

Любое выборочное исследование не дает точной информации о генеральной совокупности, и следовательно каждый результат, полученный по данным выборки, имеет некоторую погрешность, которая называется ошибкой репрезентативности. Случайный характер отбора объектов в выборочную совокупность приводит к случайному характеру ошибки репрезентативности.

Количество объектов в генеральной совокупности называется объемом генеральной совокупности. Количество объектов в выборке называется объемом выборки.

Различные значения изучаемого признака x_i, наблюдаемые у членов совокупности, называются вариантами. Число n_i, показывающее, сколько раз встречается данный вариант x_i в совокупности, называется частотой варианта. Отношение частоты варианта n_i к объему совокупности N называется относительной частотой варианта $\frac{n_i}{N}$.

Генеральной средней называется среднее значение изучаемого признака в генеральной совокупности

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i N_i}{N},$$

где x_i — значения вариантов генеральной совокупности, N_i — частоты вариантов, N — объем генеральной совокупности.

Выборочной средней называется среднее значение изучаемого признака в выборочной совокупности

$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i n_i}{n},$$

где x_i — значения вариантов выборочной совокупности, n_i — частоты вариантов, n — объем выборочной совокупности.

Пусть M — число элементов генеральной совокупности объема N, наделенных некоторым признаком. Тогда величина $p = \frac{M}{N}$ называется генеральной долей.

Пусть m — число элементов выборочной совокупности объема n, наделенных, некоторым признаком. Тогда величина $\omega = \frac{m}{n}$ называется выборочной долей.

Используя выборочный метод, неизвестные величины — генеральную среднюю и генеральную долю — оценивают при помощи случайных величин — выборочной средней и выборочной доли.

Разность $\Delta = \bar{x}_в - \bar{x}$ определяет ошибку репрезентативности при оценке генеральной средней.

Разность $\Delta = \omega - p$ определяет ошибку репрезентативности при оценке генеральной доли.

Часто ставится вопрос об установлении закона распределения значений некоторого признака в генеральной совокупности, то есть об определении относительной частоты $\frac{n_i}{N}$ каждого варианта генеральной совокупности x_i. Для этого формируют выборку, значения вариант которой $x_1, x_2, ..., x_k$ рассматриваются как значения некоторой случайной величины X и по этим значениям определяют параметры закона распределения.

Наиболее распространенным является нормальное распределение, плотность вероятности которого

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Параметрами этого распределения являются математическое ожидание a — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение σ. При этом математическое ожидание равно выборочной средней $a = \bar{x}_в$, а параметр σ равен выборочному среднему квадратическому отклонению

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_в)^2 n_i}{n-1}}.$$

Полученные в результате изучения объектов выборки значения вариант $x_1, x_2, ..., x_k$ и соответствующие им значения относительных частот $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, ..., \frac{n_k}{n}$ можно представить в виде эмпирической функции распределения $F_n(x)$, которая определяет, какая часть объектов выборочной совокупности имеет значение рассматриваемого признака меньшее x.

После определения закона распределения необходимо сопоставить данные полученного эмпирического закона распределения с соответствующим теоретическим законом распределением и в результате этого сопоставления установить, насколько подходит выбранный закон распределения. Для этой цели используются критерии согласия.

Рассмотрим критерий Колмогорова. Суть этого критерия заключается в том, что вводится функция

$$D_n = \max\left|F_n(x) - F(x)\right|.$$

Здесь $F(x)$ — функция распределения теоретического закона распределения, для которой вероятность $p(\lambda)$ неравенства $D_n \geq \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$ с ростом числа n стремится к своему пределу

$$p(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-3k^2\lambda^2}.$$

Если указанная вероятность достаточно велика, то расхождение между эмпирическим и теоретическим распределением считается несущественным и выбранный закон подходит. В противном случае считается, что выбранный закон распределения не подходит.

При использовании результатов выборочного исследования оценивают границы ошибки для среднего значения изучаемого признака $\Delta = \bar{x}_в - \bar{x}$ и ошибки для доли $\Delta = \omega - p$. Для этого используют доверительные интервалы, то есть интервалы, в которые с заданной вероятностью β попадают значения генерального среднего и генеральной доли.

Доверительный интервал для оценки генерального среднего имеет вид

$$[\bar{x}_в - \Delta, \bar{x}_в + \Delta],$$

где $\Delta = t\bar{\sigma}$ — предельная ошибка выборки, а $\bar{\sigma}$ — средняя квадратическая ошибка, равная $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

в случае повторной выборки и $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$ в случае бесповторной выборки,

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_в)^2 n_i}{n}$$ — дисперсия выборочной совокупности, параметр t — определяется из уравнения $\Phi(t) = \beta$.

Доверительный интервал для оценки генеральной доли имеет вид

$$[\omega - \Delta, \omega + \Delta],$$

где $\Delta = t\bar{\sigma}$ — предельная ошибка выборки, а $\bar{\sigma}$ — средняя квадратическая ошибка, равная

$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$ в случае повторной выборки и

$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$ в случае бесповторной выборки, параметр t определяется из уравнения $\Phi(t) = \beta$.

Учебное издание

Галабурдин Александр Васильевич

МИНИ-СПРАВОЧНИК
ДЛЯ ВУЗОВ
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный редактор *К. Хорошевская*
Выпускающий редактор *Г. Логвинова*
Технический редактор *Ю. Давыдова*

Подписано в печать 12.07.2013.
Формат 70x100 $^{1}/_{64}$. Бумага газетная.
Тираж 2 500 экз. Заказ № 5583

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59
Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ».
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14